تمارين محلولة

تمرين 01

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة $M\left(x;y\right)$ النقطة $M'\left(x';y'\right)$

حيث : $\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$

1) ليكن z لاحقة النقطة M و z' لاحقة النقطة M' .
أوجد علاقة بسيطة بين z' و $\bar{z}$ ($\bar{z}$ هو مرافق z) .
2) برهن بأن مهما تكون النقطتين A و B وصورتهما A' و B' فإن $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. 3) برهن بأن f يقبل نقطة صامدة وحيدة ϖ يطلب تعيينها . 4) C نقطة من المستوي لاحقتها $\left(\sqrt{3}+i\right)$.
عين لاحقة C' صورة C بالتحويل f .

تمرين 02

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما $z_1 = i$ و $z_2 = -1+2i$ على الترتيب .

1) برهن على وجود تشابه مباشر S نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\pi/4$ و $S\left(A\right) = B$. عين لاحقة ϖ مركز التشابه S .
2) عين لاحقة النقطة D التي صورتها النقطة C ذات اللاحقة $3i$.
3- أ) عين العبارة التحليلية للتشابه S .

ب) عين معادلة صورة الدائرة التي مركزها O (مبدأ المعلم) ونصف قطرها $1cm$ بالتشابه S .

تمرين03

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقاط M_0 , M_1 , M_2 لواحقها على الترتيب : $1+5i$, $1+i$, $-1-i$.

1- أ) عين العبارة المركبة للتشابه S بحيث : $S(M_0)=M_1$ و $S(M_1)=M_2$. ب) عين العناصر المميزة للتشابه S.

2) عين إحداثيتي النقطتين M_3 و M_4 حيث : $S(M_2)=M_3$ و $S(M_3)=M_4$. 3) نعتبر التحويل $S^n = S\circ S\circ ...\circ S$ تركيب n مرة S . أ)ما طبيعة التحويل S^n وما هي عناصره المميزة ؟. ب) حدد قيم العدد الطبيعي n من أجلها يكون S^n تحاكي .

تمرين04

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس مباشر للمستوي .

ليكن التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1+i)z+3i$.

1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

2)نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) و زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. نضع $f=r\circ S$.

أ) عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة.

ب)عين لاحقة صورة النقطة A ذات اللاحقة (-3) بالتحويل f .

جـ) عين صورة المستقيم (D) ذو المعادلة $x-y+1=0$ بالتحويل f

تمرين05

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

$\varpi(2;1)$ نقطة من المستوي ، S تشابه مباشر مركزه ϖ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. (D) المستقيم ذو المعادلة $2x-2y+1=0$ ،

$M(x;y)$ نقطة من المستوي صورتها بالتشابه S هي $M'(x';y')$

1) أعط الكتابة المركبة للتشابه S .

2) نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. أكتب x' و y' بدلالة x و y .

3)استنتج معادلة (D') صورة المستقيم (D) بالتشابه S .

4) نعتبر التحاكي الذي مركزه ϖ ونسبته 2 .

أ – أعط العبارة المركبة للتحاكي h .

ب – عين طبيعة التحويل $S\circ h$ و حدد عناصره المميزة.

تمرين06

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث:

$$\begin{cases} x'=\frac{-4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{6}{5} \\ y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{2}{5} \end{cases}$$

1) أثبت أن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f هي مستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته. 2) أثبت أن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يوازي شعاعا ثابتا.

3) أثبت أن منتصف $[MM']$ ينتمي إلى (Δ) ، ثم عين طبيعة التحويل f .

4) عين إحداثيتي النقطة A' صورة النقطة $A(-5;10)$ بالتحويل f .

تمرين07

1)من بين الأجوبة الثلاثة يوجد واحد منهم صحيح .
عين الجواب الصحيح .

العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه النقطة $\varpi(1;0)$ و زاويته $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ هي: أ) $z'=(1+i)z+1-i$.

ب) $z'=(1-i)z+1-i$. جـ) $z'=(1-i)z+i$.

2) في كل حالة من الحالات الآتية ، بين فيما إذا كان التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة.

أ) $z'=(1+i)z+i$ ، ب) $z'=(1+\sqrt{3})\bar{z}$

جـ) $z'=2z+1-i$ ، د) $z'=(1-\sqrt{3})z+1$

هـ) $z'=z+2i-1$ ، و) $z'=z\left(\frac{1+i}{1-i}\right)z+i$

تمرين08

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=-3-i$.

1) عين صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

2-ا) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي

ب – ماذا نستنتج بالنسبة للنقط A ، B ، C .

جـ - عين المركز و النسبة للتحاكي h الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى C .

تمرين09

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

m عدد مركب . I) نعتبر التحويل النقطي T_m من المستوي في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث $z'=(m+i)z+m-1-i$. 1) عين m حتى يكون T_m انسحابا

2) بوضع $m=a+bi$ ، أوجد العلاقة بين a ، b كي يكون التحويل T_m دوران . II) في ما يأتي نأخذ $m=1$

1) ا- احسب لاحقة النقطة الصامدة ϖ للتحويل T_1 .

ب – برهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

جـ - برهن أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $z'-z=i(z-1)$ ، ثم استنتج أنه إذا كانت M تختلف عن ϖ فإن المثلث $\varpi MM'$ قائم في M .

تمرين10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$

حيث: $\begin{cases} x'=2\alpha x-\alpha \\ y'=(\alpha-1)x+(\alpha+1)y+\alpha-2 \end{cases}$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$

1) ناقش حسب قيم α مجموعة النقط الصامدة للتحويل T_α .

2) برهن أن T_1 $(\alpha=1)$ هو تحاكي يطلب تعيين مركزه و نسبته.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه $\varpi(1;1)$ و زاويته $\pi/3$.

- عين طبيعة التحويل S حيث: $S=T_1\circ r$ و حدد عناصره المميزة.

4) للتذكير: نعبر عن التشابه S الذي زاويته θ و نسبته k و مركزه ϖ ذات اللاحقة z_ϖ بـ : $z'-z_\varpi=ke^{i\theta}(z-z_\varpi)$. باستعمال هذه العلاقة عين العبارة المركبة والعبارة التحليلية للتشابه S .

تمرين 11

نعتبر التحويلين النقطيين S و h اللذان يرفقان بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث :

$$h:\begin{cases} x'=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ y'=2(y-1) \end{cases} \quad ، \quad S:\begin{cases} x'=-x-\sqrt{3}y+\sqrt{3} \\ y'=\sqrt{3}x-y+2 \end{cases}$$

1) عين مجموعة النقط الصامدة لكل من التحويلين S ، h .

2) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

أ ـ أكتب العبارة المركبة للتحويلين S ، h .

ب- استنتج طبيعة و العناصر المميزة للتحويلين S ، h .

3) A ، B ، C ، D نقط من المستوي و A' ، B' ، C' ، D' صورها بالتحويل S .

أ) بين أن $A'B'=2AB$. ب - $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$.

4) عين مركز و نصف قطر الدائرة (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها $(0;1)$ و نصف قطرها $3cm$ بالتحويل h .

تمرين 12

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1) r هو الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

نسمي C صورة النقطة B بواسطة الدوران r .

أ ـ عين الكتابة المركبة للدوران r . ب- عين z_C لاحقة النقطة C

2) D مرجح الجملة $\{(C;+2),(B;2),(A;-1)\}$.

أ- احسب z_D لاحقة النقطة D .

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3) h هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 .

نسمي E صورة النقطة D بالتحاكي h .

أ- عين الكتابة المركبة لـ h . ب ـ عين z_E لاحقة E .

جـ -عين العبارة المركبة للتحويل $h\circ r$ وحدد عناصره المميزة .

تمرين 13

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويل f_λ الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z

النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث: $\begin{cases} x' = \lambda x - \lambda\sqrt{3}y \\ y' = \lambda\sqrt{3}x + \lambda y \end{cases}$

مع $\lambda \in \mathbb{R}^*$.   1) عين مجموعة النقط الصامدة للتحويل f_λ .

2) أوجد العلاقة بين z و z' .

3) ناقش حسب قيم λ طبيعة التحويل f_λ و عين عناصره المميزة.

4) عين طبيعة التحويل $S = f_1 \circ f_1$ و عناصره المميزة.

تمرين 14

1) برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ϖ لاحقتها z_0 و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة

النقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

2) باستعمال القاعدة السابقة :

أ- استنتج طبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ:

$z' - (1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 1 - i)$.

ب -عين لاحقة النقطة B صورة النقطة A ذات اللاحقة $2i$

بالتشابه S الذي زاويته $\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2 و مركزه النقطة ذات اللاحقة

$1+2i$.

تمرين 15

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A = i$ ، $z_B = 1-i$ ، $z_C = -1$.

1) نعتبر التحويل S المعرف بـ: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - i$.

أ- أعط الشكل الجبري للعدد المركب $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و استنتج الكتابة المركبة للتحويل S .

ب- ما طبيعة التحويل S و عناصره المميزة؟

2) أ -عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C بالتحويل S .

ب- بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

3) لتكن G مرجع الجملة $\{(A;3),(B;1),(C;-2)\}$

أ- عين إحداثيتي النقطة G .

ب- عين لاحقة G' مرجع الجملة $\{(A';3),(B';1),(C';-2)\}$

جـ - عين $z_{G'}$ حيث: $G' = S(G)$.   ماذا تستنتج؟

4) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. بين أن $\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{GM}$ ، ثم استنتج طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

حلول التمارين

حل التمرين 1

1) $z' = x' + iy' = \sqrt{3}x + y - 3 + i\left(x - \sqrt{3}y + 3\right) =$

$$= \sqrt{3}x + y - 3 + ix - i\sqrt{3}y + 3i =$$

$$= \sqrt{3}\left(x - iy\right) - i^2 y + ix - 3 + 3i =$$

$$= \sqrt{3}\left(x - iy\right) + i\left(x - iy\right) - 3 + 3i =$$

$$= \left(\sqrt{3} + i\right)\left(x - iy\right) - 3 + 3i = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$$

إذن : $z' = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$.

2) إذا كان b', a', b, a هي لواحق النقط $B', A', B, A,$ فإن :

$$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left|b' - a'\right| = \left|\left(\sqrt{3} + i\right)\left(\bar{b} - \bar{a}\right)\right| = \left|\sqrt{3} + i\right| \times \left|\bar{b} - \bar{a}\right|$$

نعلم أن : $\overline{b - a} = \bar{b} - \bar{a}$ ومنه : $\left|\bar{b} - \bar{a}\right| = \left|\overline{b - a}\right| = \left|b - a\right|$.

($\overline{b - a}$ هو مرافق العدد المركب $b - a$ ونعلم أن عددين مركبين مرافقين لهما نفس الطويلة .) .

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left|\sqrt{3} + i\right| \times \left|b - a\right| = 2 \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. إذن مهما تكن النقطتين B, A وصورتهما B', A' فإن : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = 2 \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

3) النقطة $\varpi\left(x; y\right)$ هي نقطة صامدة بالتحويل f يعني :

$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 3 = x \\ x - \sqrt{3}y + 3 = y \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} \left(\sqrt{3} - 1\right)x + y = 3 \\ x - \left(\sqrt{3} + 1\right)y = -3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$.

إذن النقطة الصامدة للتحويل f هي $\varpi\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

4) نعلم أن صورة النقطة ذات اللاحقة z هي النقطة لاحقتها z' حيث : $z' = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z} - 3 + 3i$. ومنه :

$$z'_{C'} = \left(\sqrt{3} + i\right)\bar{z}_C - 3 + 3i = \left(\sqrt{3} + i\right)\left(\sqrt{3} - i\right) - 3 + 3i =$$

$$= 4 - 3 + 3i = 1 + 3i$$

حل التمرين 2

1) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه هي من الشكل : $z' = az + b$

حيث $|a|$ هي نسبة التشابه و $\arg\left(a\right)$ هي زويته ، ومنه :

$a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$.

لدينا $S\left(A\right) = B$ يعني : $z_B = \left(1 + i\right)z_A + b$ ومنه:

$b = z_B - \left(1 + i\right)z_A = \left(-1 + 2i\right) - \left(1 + i\right)i = i$.

إذن يوجد تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وزويته $\frac{\pi}{4}$ ويحول النقطة A إلى النقطة B وعبارته المركبة هي : $z' = \left(1 + i\right)z + i$

نعلم أن z_ϖ هي معرفة بـ $z_\varpi = (1+i)z_\varpi + i$ ومنه $z_\varpi = -1$

2) النقطة C صورة النقطة D بالتشابه S يعني $S(D) = C$

ومنه $z_C = (1+i)z_D + i$ ومنه $z_D = \frac{z_C - i}{1+i} = \frac{2i}{1+i} = 1+i$.

3-أ) بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ فإن :

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) + i = (x-y) + i(x+y+1)$$

ومنه : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ ⊕ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

ب) نعلم أن معادلة الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $1cm$ هي : $x^2 + y^2 = 1$ $(*)$. من الجملة السابقة ⊕ نستنتج أن :

$x = \frac{1}{2}(x' + y' - 1)$ و $y = \frac{1}{2}(-x' + y' - 1)$ وبتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $\frac{1}{4}(x' + y' - 1)^2 + \frac{1}{4}(-x' + y' - 1)^2 = 1$

وبعد النشر والتبسيط للمعادلة نجد : $x'^2 + y'^2 - 2y' = 1$.

إذن معادلة صورة الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $1cm$ بالتشابه S هي : $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

حل التمرين3

1- أ) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل: $z' = az + b$

حيث a و b عددين مركبين .

$S(M_0) = M_1$ يعني $1 + i = a(1+5i) + b$

$S(M_1) = M_2$ يعني $-1 - i = a(1+i) + b$

إذن لدينا الجملة : $\begin{cases} a(1+5i) + b = 1 + i \\ a(1+i) + b = -1 - i \end{cases}$

بالطرح طرفا من طرف نجد : $2ai = 1 + i$ ومنه :

$a = \frac{1+i}{2i} = \frac{(1+i)(-i)}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$. وبتعويض في إحدى المعادلتين للجملة نجد : $b = -2 - i$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + (-2-i)$

ب) العناصر المميزة للتشابه S هي : - النسبة : $\left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- الزاوية : $\arg\left(\frac{1}{2}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

- المركز : هي النقطة الصامدة ϖ لاحقتها z_ϖ

حيث: $z_\varpi = \frac{1}{2}(1-i)z_\varpi - 2 - i$ ومنه $z_\varpi = -3 + i$.

2) $S(M_2) = M_3$ يعني :

$z_{M_3} = \frac{1}{2}(1-i)(-1-i) - 2 - i = -3 - i$.

$S(M_3) = M_4$ يعني :

$z_{M_4} = \frac{1}{2}(1-i)(-3-i) - 2 - i = -4$.

3- أ) التحويل $S'' = S \circ S \circ ...S$ مركب من n تشابه مباشر لها نفس المركز ϖ فهو تشابه مركزه ϖ ونسبته هي :

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ وزاويته تساوي $-n\times\frac{\pi}{4}$. ب) يكون التحويل

S'' تحاكي إذا كان $-\frac{n\pi}{4}=k\pi$ ومنه $n=-4k$ $\left(k\in\mathbb{Z}^-\right)$

حل التمرين4

1) $z'=(1+i)z+3i$ هي الكتابة المركبة للتشابه S الذي

نسبته تساوي $|1+i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومركزه

النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة : $z_\varpi=\frac{3i}{1-(1+i)}=\frac{3i}{-i}=-3$.

2- أ) التحويل $f=r\circ S$ يعتبر تركيب تشابهين مباشرين لأن الدوران r هو تشابه نسبته 1 . إذن التحويل f مركب من تشابهين فهو تشابه نسبته جداء النسبتين $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$ وزاويته مجموع الزاويتين : $\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω للتحويل f . لتعيين النقطة Ω نجد العبارة المركبة للتحويل f .

لدينا $f=r\circ S$ حيث r هو الدوران الذي مركزه O (مبدأ المعلم) وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ وتكون عبارته المركبة هي : $z'=-iz$

$(r\circ S)(M)=r\left[S(M)\right]=r(M_1)=M'$.

$r(M_1)=M'$ يعني $z_{M'}=-i\times z_{M_1}$

$S(M)=M_1$ يعني $z_{M_1}=(1+i)z+3i$

ومنه : $z_{M'}=-iz_{M_1}=-i\left[(1+i)z+3i\right]=(1-i)z+3$

إذن العبارة المركبة للتحويل f هي : $z'=(1-i)z+3$.

لاحقة النقطة الصامدة للتحويل f هي معرفة بـ :

$z_\Omega=(1-i)z_\Omega+3$ ومنه $z_\Omega=-3i$.

ب) $f(A)=A'$ يعني :

$z_{A'}=(1-i)z_A+3=(1-i)(-3)+3=3i$.

جـ) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ وبالتعويض في العبارة المركبة للتحويل f نجد العبارة التحليلية لـ f .

$$x'+y'=(1-i)(x+iy)+3=(x+y+3)+i(-x+y)$$

ومنه : $\begin{cases}x'=x+y+3\\ y'=-x+y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x'-y'-3)\\ y=\frac{1}{2}(x'+y'-3)\end{cases}$

وبتعويض x و y بدلالة x' و y' في معادلة المستقيم (D) نجد معادلة المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحويل f :

$\frac{1}{2}(x'-y'-3)-\frac{1}{2}(x'+y'-3)+1=0$ ومنه

$-y'+1=0$ ومنه $y'=1$. إذن معادلة (D') هي $y=1$.

حل التمرين5

1) العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z'=az+b$

لدينا : $a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. نعلم أن :

$z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$ ومنه $b = z_\varpi\left(1-a\right) = \left(2+i\right)\left(-i\right) = 1-2i$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = \left(1+i\right)z + 1 - 2i$.

(2

$$z' = x' + iy' = \left(1+i\right)\left(x+iy\right) + 1 - 2i = $$
$$= \left(x-y+1\right) + i\left(x+y-2\right)$$

ومنه $\begin{cases} x' = x-y+1 \\ y' = x+y-2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(x'+y'+1\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(-x'+y'+3\right) \end{cases}$

3) بالتعويض في معادلة المستقيم (D) نجد معادلة المستقيم (D')

$$2\times\frac{1}{2}\left(x'+y'+1\right) - 2\times\frac{1}{2}\left(-x'+y'+3\right) + 1 = 2x'-1 = 0$$

إذن معادلة (D') صورة (D) بالتشابه S هي $2x-1=0$.

4- أ) العبارة المركبة للتحاكي h هي على الشكل $z' = az+b$ حيث : $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. لدينا $a = 2$ ونعلم أن : $z_\varpi = 2z_\varpi + b$ ومنه : $b = -2-i$ ، إذن العبارة المركبة للتحاكي h هي $z' = 2z-2-i$

ب) التحاكي الذي نسبته $k\left(k>0\right)$ يعتبر تشابه نسبته k وزاويته 0

إذن التحويل $S \circ h$ هو مركب من تشابهين لهما نفس المركز ϖ فهو تشابه نسبته جداء النسبتين $2\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ومركزه النقطة ϖ وزاويته مجموع الزاويتين $\pi/4 + 0 = \pi/4$.

حل التمرين6

1) $M\left(x;y\right)$ نقطة صامدة بالتحويل f يعني $f\left(M\right) = M$ ومنه

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -4x/5 + 3y/5 - 6/5 = x \\ 3x/5 + 4y/5 + 2/5 = y \end{cases}$

$\begin{cases} 9x/5 - 3y/5 + 6/5 = 0 \\ 3x/5 - y/5 + 2/5 = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 3x-y+2=0 \end{cases}$

إذن مجموعة النقاط الصامدة للتحويل f هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $3x-y+2=0$.

(2

$$\overrightarrow{MM'} = \left(x'-x\right)\vec{i} + \left(y'-y\right)\vec{j} =$$
$$= \left(-9x/5 + 3y/5 - 6/5\right)\vec{i} + \left(3x/5 - y/5 + 2/5\right)\vec{j} =$$
$$= 1/5\left(3x-y+2\right)\left(-3\vec{i}+\vec{j}\right) = k\left(-3\vec{i}+\vec{j}\right),\left(k\in\mathbb{R}\right)$$

بما أن $\overrightarrow{MM'} = k\left(-3\vec{i}+\vec{j}\right)$ فالشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يوازي الشعاع الثابت $\vec{u} = -3\vec{i}+\vec{j}$.

3) ليكن I منتصف القطعة المستقيمة $\left[MM'\right]$ فإن :

$$x_I = \frac{x'+x}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{10}\left(x+3y-6\right)$$

$$y_I = \frac{y'+y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}y + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10}\left(3x+9y+2\right)$$

$$3x_I - y_I + 2 = 3/10\left(x+3y-6\right) - 1/10\left(3x+9y+2\right) + 2 = 0$$

إذن النقطة I منتصف $[MM']$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التحويل f هو تناظر بالنسبة إلى المستقيم (Δ) وفق منحى الشعاع $\vec{u}=-3\vec{i}+\vec{j}$. 4) إحداثيتي النقطة A' هي :

$$x_{A'} = -\frac{4}{5}\times(-5)+\frac{3}{5}\times 10-\frac{6}{5}=\frac{44}{5}$$

$$y_{A'} = \frac{3}{5}\times(-5)+\frac{4}{5}\times 10+\frac{2}{5}=\frac{27}{5}$$

حل التمرين7

1) الجواب الصحيح هو رقم (3) أي العبارة المركبة للتشابه S هي $z'=(1-i)z+i$ لأن نسبة التشابه S هي $|1-i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$ ومركزه ϖ حيث $z_{\varpi}=\frac{i}{1-(1-i)}=1$.

2) نعلم أن العبارة من الشكل $z'=az+b$ حيث a عدد مركب طويلته لا تساوي 1 تمثل تشابه مباشر .

التحويل المعرف بـ : $z'=(1+i)z+i$ هو تشابه نسبته $|1+i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=\frac{i}{1-(1+i)}=-1$.

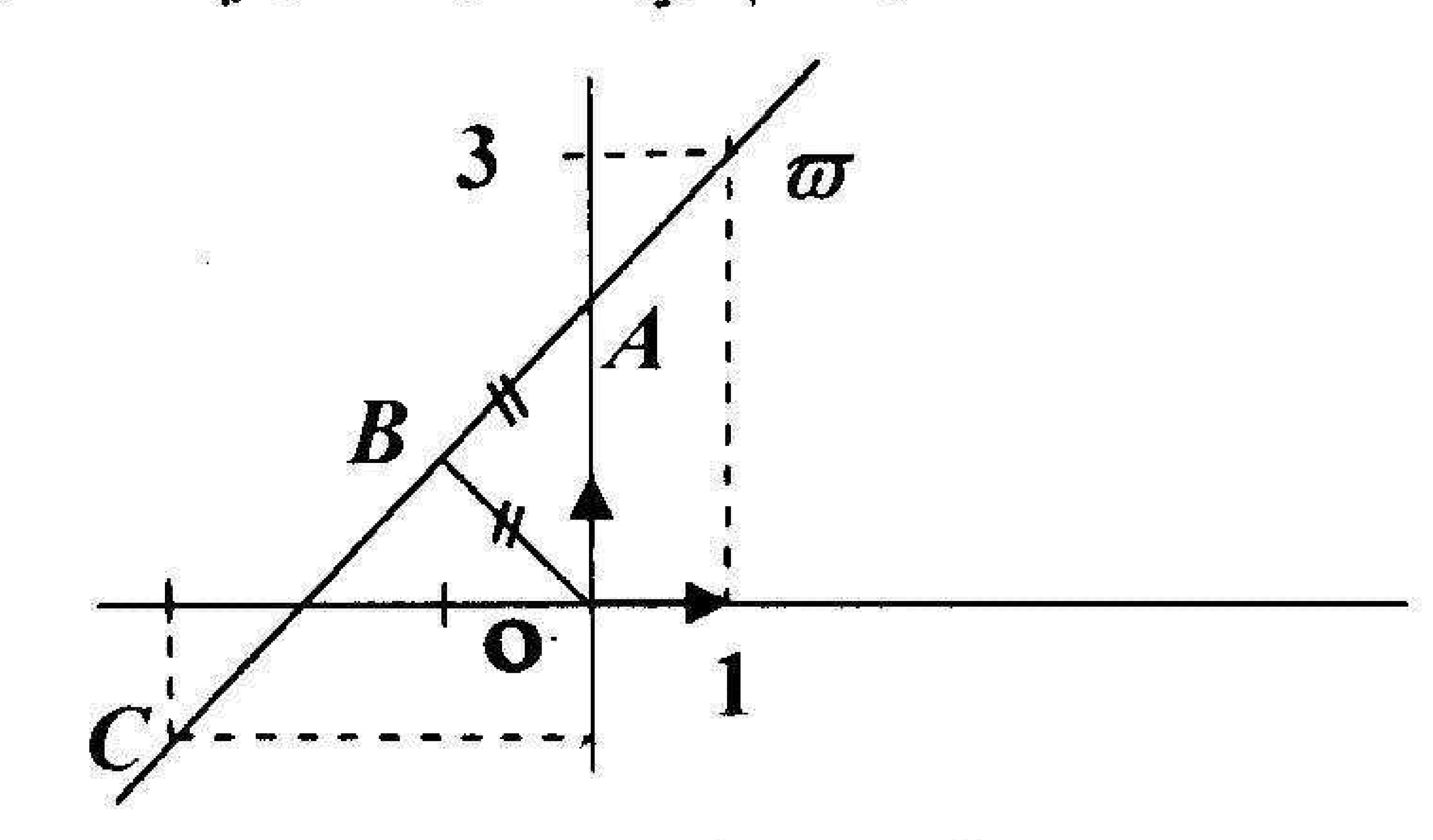
التحويل المعرف بـ : $z'=(1-i\sqrt{3})z+1$ هو تشابه نسبته $|1-i\sqrt{3}|=2$ وزاويته $\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ ومركزه ϖ حيث : $z_{\varpi}=-\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

الكتابة المبسطة للتحويل : $z'=2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)z+i$ هي $z'=2iz+i$

وهي تمثل تشابه نسبته 2 وزاويته $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=\frac{i}{1-2i}=\frac{i(1+2i)}{1+2^2}=-\frac{2}{5}+i\frac{1}{5}$

حل التمرين8

1) صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة A . يمكن التحقق من هذا باستعمال العبارة المركبة للدوران وهي : $z'=iz+2i$. وتكون صورة النقطة O بالدوران هي النقطة التي لاحقتها $z=i\times 0+2i=2i$ وهي تمثل لاحقة A المثلث OAB هو قائم في B ومتساوي الساقين .



2- أ) $$\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=\frac{-3-i+1-i}{-1+i-2i}=\frac{2(-1-i)}{-1-i}=2$$

ويكون الشكل المثلثي هو $\frac{z_C-z_B}{z_B-z_A}=2(\cos 0+i\sin 0)$

ب) نعلم أن : $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right) = 0^\circ$ ،
إذن النقاط C, B, A هي على استقامة واحدة .

ج) نعلم أن العبارة المركبة للتحاكي هي من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$. لدينا $\begin{cases} h(A) = B \\ h(B) = C \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$
بالطرح طرفا من طرف نجد : $z_C - z_B = a(z_B - z_A)$ ومنه :
$a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = 2$ وبالتعويض في إحدى المعادلتين للجملة السابقة
نجد : $b = z_B - 2z_A = -1 + i - 4i = -1 - 3i$ ، ومنه العبارة المركبة للتحاكي هي : $z' = 2z - 1 - 3i$. مركز التحاكي هي النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة : $z_\varpi = \frac{-1-3i}{1-2} = 1 + 3i$

حل التمرين9

I. 1) يكون التحويل T_m انسحاب إذا كان : $m + i = 1$ ومنه $m = 1 - i$. 2) يكون التحويل T_m دوران إذا كان $|m + i| = 1$ ،
بوضع : $m = a + bi$ فإن $|m + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = 1$ ومنه $a^2 + (b+1)^2 = 1$ ومنه $a^2 + b^2 + 2b = 0$. يكون T_m دوران إذا تحقق ما يلي : $m = a + bi$ و $a^2 + b^2 + 2b = 0$

II. 1- أ) لاحقة النقطة الصامدة ϖ لـ T_1 هي $z_\varpi = \frac{-i}{1-(1+i)} = 1$.

ب) التحويل T_1 هو معرف بالعبارة المركبة $z' = (1+i)z - i$ وهي من الشكل $z' = az + b$ و $|a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1$ فالتحويل T_1 هو تشابه مباشر مركزه النقطة $\varpi(1;0)$ وزاويته $\arg(1+i) = \pi/4$ ونسبته $|1+i| = \sqrt{2}$. جـ) لدينا $z' = (1+i)z - i$ ومنه $z' = z + i(z-1)$ ومنه $z' - z = i(z-1)$. إذا كان $z \neq 1$ أي : M يختلف عن ϖ فإن : $\frac{z'-z}{z-1} = i$ ونعلم أن $z_\varpi = 1$ ومنه :
$\frac{z'-z}{z-1} = \frac{z'-z}{z-z_\varpi} = i$ ومنه $\frac{z'-z}{z_\varpi - z} = -i$.
نعلم أن $\arg\left(\frac{z'-z}{z_\varpi - z}\right) = \left(\overrightarrow{M\varpi}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg(-i) = -\pi/2$.
إذن المثلث $\varpi MM'$ هو قائم في M .

حل التمرين10

1) M نقطة صامدة بالتحويل T_α معناه : $T_\alpha(M) = M$ يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2\alpha x - \alpha = x \\ (\alpha - 1)x + (\alpha + 1)y + \alpha - 2 = y \end{cases}$

$$(*)\begin{cases} (2\alpha - 1)x - \alpha = 0 \\ (\alpha - 1)x + \alpha y + \alpha - 2 = 0 \end{cases}$$

محدد الجملة $(*)$ يساوي $\alpha(2\alpha - 1)$.

- إذا كان $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq \frac{1}{2}$ فالجملة $(*)$ تقبل حل وحيد $(x_0;y_0)$ ويكون للتحويل T_α في هذه الحالة نقطة صامدة وحيدة $\varpi(x_0;y_0)$.

- إذا كان $\alpha = 0$ فالجملة $(*)$ تصبح : $\begin{cases}-x=0\\-x-2=0\end{cases}$

وهي جملة مستحيلة ، وبالتالي لا توجد أية نقطة صامدة لـ T_α .

- إذا كان $\alpha = \frac{1}{2}$ فالجملة $(*)$ مستحيلة ومنه التحويل T_α ليست له أية نقطة صامدة .

2) من أجل $\alpha = 1$ لدينا T_1 وهو يحول النقطة $M(x;y)$ إلى النقطة $M'(x';y')$ حيث : $\begin{cases}x'=2x-1\\y'=2y-1\end{cases}$.

التحويل T_1 يقبل نقطة صامدة وحيدة $\varpi(1;1)$.

$$\overrightarrow{\varpi M'} = (x'-1)\vec{i} + (y'-1)\vec{j} = (2x-2)\vec{i} + (2y-2)\vec{j} =$$
$$= 2\left[(x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}\right] = 2\overrightarrow{\varpi M}$$

بما أن $\overrightarrow{\varpi M'} = 2\overrightarrow{\varpi M}$ حسب التعريف فالتحويل T_1 هو تحاكي نسبته 2 ومركزه النقطة الصامدة $\varpi(1;1)$.

3) التحويل $S = T_1 \circ r$ هو مركب من دوران مركزه ϖ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ والتحاكي T_1 نسبته 2 ومركزه ϖ فهو تشابه (حسب التعريف) مركزه ϖ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته2 .

4) نعبر عن التشابه S الذي زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ومركزه ϖ ذات اللاحقة $z_\varpi = 1+i$ بـ : $z'-(1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1-i)$

$$z'-(1+i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z-1-i) =$$
$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)(z-1-i) = \left(1+i\sqrt{3}\right)z - 1 + \sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

ومنه : $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1-i)$ وهي العبارة المركبة للتشابه S . بوضع $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$ وبالتعويض في العبارة المركبة للتشابه S نجد العبارة التحليلية .

$x'+iy' = \left(1+i\sqrt{3}\right)(x+iy) + \sqrt{3}(1-i)$ ومنه :

$x'+iy' = \left(x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\right) + i\left(x\sqrt{3}+y-\sqrt{3}\right)$ ومنه :

$\begin{cases}x' = x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\\y' = x\sqrt{3}+y-\sqrt{3}\end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

حل التمرين11

1) $M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل S يعني $S(M) = M$ يكافئ ($x' = x$ و $y' = y$) ومنه :

$\begin{cases}x = -x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\\y = \sqrt{3}x-y+2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2x+\sqrt{3}y-\sqrt{3} = 0 \quad (1)\\\sqrt{3}x-2y+2 = 0 \quad (2)\end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في $\sqrt{3}$ والمعادلة (2) في (-2) نحصل على

الجملة التالية : $\begin{cases} 2\sqrt{3}x+3y-3=0 & (3)\\ -2\sqrt{3}x+4y-4=0 & (4)\end{cases}$ بجمع (3) و (4)

نجد $7y-7=0$ ومنه $y=1$ وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$x=0$ ، إذن التحويل S يقبل نقطة صامدة وحيدة $\varpi(0;1)$.

$M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل h يعني $h(M)=M$ يكافئ

$\begin{cases} x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ y=2(y-1)\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x-1=0\\ y-2=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=1\\ y=2\end{cases}$

التحويل h يقبل نقطة صامدة وحيدة $\Omega(1;2)$.

2- أ) العبارة المركبة للتحويل S :

$$z'=x'+iy'=\left(-x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}x-y+2\right)=$$

$$=-x-iy+\sqrt{3}\,(ix-y)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=$$

$$=-(x+iy)+\sqrt{3}\left(ix+i^2y\right)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=$$

$$=-(x+iy)+\sqrt{3}i\,(x+iy)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)(x+iy)+\left(\sqrt{3}+2i\right)=\left(-1+\sqrt{3}i\right)z+\left(\sqrt{3}+2i\right)$$

إذن العبارة المركبة لـ S هي : $z'=\left(-1+i\sqrt{3}\right)z+\left(\sqrt{3}+2i\right)$

العبارة المركبة للتحويل h :

$$z'=x'+iy'=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2(y-1)i=2(x+iy)-1-2i$$

العبارة المركبة للتحويل h هي : $z'=2z-1-2i$.

ب) العبارة المركبة للتحويل S تدل على أن S هو تشبه مركزه

النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة $z_{\varpi}=1$ ونسبته $2=\left|-1+i\sqrt{3}\right|$

وزاويته $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

من شكل العبارة المركبة للتحويل h نستنتج أن h هو تحاكي نسبته 2

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $1+2i$.

3- أ) لنرمز بـ : a,b,c,d إلى لواحق النقط : A,B,C,D وبـ :

a',b',c',d' إلى لواحق النقط : A',B',C',D' .

نعلم أن : $AB=|b-a|$ و $A'B'=|b'-a'|$ ولدينا :

$$a'=\left(-1+\sqrt{3}i\right)a+\sqrt{3}+2i$$

$$b'=\left(-1+\sqrt{3}i\right)b+\sqrt{3}+2i$$

$$A'B'=|b'-a'|=\left|\left(-1+\sqrt{3}i\right)(b-a)\right|=\left|-1+\sqrt{3}i\right|\times|b-a|==2AB$$

ب) بما أن A' و B' هما صورتا النقطتين A و B بالتشابه S

الذي نسبته 2 فإن : $A'B'=2AB$ (من خواص التشابه)

و أيضا : $C'D'=2CD$. لدينا $\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=2$ ومنه

$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$. 4) نعلم أن صورة دائرة (C) مركزها ϖ

ونصف قطرها r بالتحاكي h الذي نسبته k هي الدائرة (C')

مركزها $\varpi' = h(\varpi)$ ونصف قطرها $r' = |k| \times r$.

إحداثيتي ϖ' هي : $x_{\varpi'} = 2\left(0 - \frac{1}{2}\right) = -1$

$y_{\varpi'} = 2(1-1) = 0$. $r' = 2 \times r = 2 \times 3 = 6$.

مركز الدائرة (C') هي $\varpi'(-1;0)$ ونصف قطرها $r' = 6$.

حل التمرين12

1- أ) الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) وزاويته θ هي من الشكل : $z' = az$ حيث : $a = \cos\theta + i\sin\theta$.
إذن الكتابة المركبة للدوران r هي

$$z' = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z .$$

ب) لدينا $r(B) = C$ ومنه : $z_C = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B$

$$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_C = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

2- أ) $z_D = \frac{-z_A + 2z_B + 2z_C}{-1+2+2} = \frac{-i-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i}{3} = -i$

$$OB = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1 \quad , \quad OC = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$$

$$OA = |i| = 1 \quad ، \quad OD = |-i| = 1$$

بما أن : $OA = OB = OC = OD = 1$ فالنقاط : A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها O ونصف قطرها 1 .

3- أ) الكتابة المركبة للتحاكي h الذي نسبته 2 هي من الشكل $z' = 2z + b$ ، وبما أن A هي مركز التحاكي فهي النقطة الصامدة للتحاكي h ومنه $h(A) = A$ يكافئ $z_A = 2z_A + b$ ومنه $b = -z_A = -i$ ، إذن العبارة المركبة للتحاكي h هي $z' = 2z - i$

ب) E صورة النقطة D بالتحاكي h يعني $h(D) = E$ ومنه $z_E = 2z_D - i = -3i$.

جـ) العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$

$$M(z) \xrightarrow{r} M_1(z_1) \xrightarrow{h} M'(z') .$$

$M_1 = r(M)$ يعني : $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$M' = h(M_1)$ يعني :

$$z' = 2z_1 - i = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i$$

إذن العبارة المركبة للتحويل $h \circ r$ هي : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z - i$

التحويل $h \circ r$ هو تشابه نسبته $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ وزاويته هي : $\arg\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة :

$$z_\varpi = \frac{-i}{1 - \left(-1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{-i}{2 - i\sqrt{3}} = \frac{-i\left(2 + i\sqrt{3}\right)}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$$

حل التمرين13

1) $M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل f_λ يعني $f_\lambda(M)=M$

$\begin{cases} x'=\lambda x-\lambda\sqrt{3}y=x \\ y'=\lambda\sqrt{3}x+\lambda y=y \end{cases}$ يكافئ $(*)\begin{cases} (\lambda-1)x-\lambda\sqrt{3}y=0 \\ \lambda\sqrt{3}x+(\lambda-1)y=0 \end{cases}$

الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد $(0;0)$.

إذن التحويل f_λ يقبل نقطة صامدة وحيدة $(0;0)$.

2) $z'=x'+iy'=(\lambda x-\lambda\sqrt{3}y)+i(\lambda\sqrt{3}x+\lambda y)=$

$(\lambda x+i\lambda y)+\lambda\sqrt{3}ix-\lambda\sqrt{3}y=\lambda(x+iy)+\lambda\sqrt{3}(ix-y)$

$=\lambda(x+iy)+\lambda\sqrt{3}(ix+i^2y)=\lambda(x+iy)+\lambda\sqrt{3}i(x+iy)$

$=(\lambda+\lambda\sqrt{3}i)(x+iy)=\lambda(1+i\sqrt{3})z$

3) من أجل كل $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $|\lambda(1+i\sqrt{3})|=|\lambda||1+i\sqrt{3}|=2|\lambda|$

- إذا كان $\lambda=-\frac{1}{2}$ فإن $2|\lambda|=1$ ويكون التحويل f_λ دوران مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\arg\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}$

- إذا كان $\lambda=\frac{1}{2}$ فإن $2|\lambda|=1$ ويكون التحويل f_λ دوران مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

- إذا كان $\lambda\in\mathbb{R}^*-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ فإن $2|\lambda|\neq 1$ ويكون

التحويل f_λ تشابه مركزه $O(0;0)$ وزاويته هي : $\frac{\pi}{3}$ لما يكون λ عدد حقيقي موجب و $\frac{4\pi}{3}$ لما يكون λ عدد حقيقي سالب .

4) التحويل f_1 هو معرف بعبارته المركبة : $z'=(1+i\sqrt{3})z$ وهو تشابه نسبته 2 و مركزه $O(0;0)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، إذن التحويل $S=f_1\circ f_1$ مركب من تشابهين لهما نفس المركز ، فهوتشابه مركزه $O(0;0)$ ونسبته $2^2=4$ وزاويته $2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

حل التمرين14

1) نعلم أن العبارة المركبة للتشابه S الذي نسبته k وزاويته θ ومركزها النقطة ϖ لاحقتها z_0 هي من الشكل : (1) $z'=az+b$

حيث : $a=k(\cos\theta+i\sin\theta)$. بما أن z_0 هي لاحقة النقطة الصامدة ϖ فإن : (2) $z_0=az_0+b$. بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد : $(*)$ $z'-z_0=a(z-z_0)$.

نعلم أن الشكل الأسي للعدد المركب a هو : $a=ke^{i\theta}$ وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$.

2- أ) لدينا S معرف بـ : $z'-(1+i)=2e^{i\frac{\pi}{4}}[z-(1+i)]$.

بالمطابقة مع العلاقة السابقة نلاحظ أن :

$z_0=1+i$ و $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$. إذن التحويل S هو تشابه نسبته 2 ومركزه النقطة ذات اللاحقة $z_0=1+i$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$.

ب) باستعمال القاعدة السابقة للتشابه : $z'-z_0=ke^{i\theta}\left(z-z_0\right)$

نستطيع أن نعبر عن التشابه S الذي زاويته $\pi/3$ ونسبته 2 ومركزه النقطة ذات اللاحقة $(1+2i)$ بـ :

$z'-(1+2i)=2e^{i\pi/3}(z-1-2i)$ ومنه :

$z'=2e^{i\pi/3}(z-1-2i)+(1+2i)$. لدينا $S(A)=B$ ومنه

$z_B=2e^{i\pi/3}(z_A-1-2i)+(1+2i)$. نعلم أن $z_A=2i$ ،

$e^{i\pi/3}=\cos\pi/3+i\sin\pi/3=1/2+i\sqrt{3}/2$ ومنه :

$$z_B=2\left(1/2+i\sqrt{3}/2\right)\times(-1)+(1+2i)=\left(2-\sqrt{3}\right)i$$

حل التمرين15

أ) $2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$

$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+1-i$.

ب) التحويل S هو تشابه نسبته $\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$ وزاويته

$\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\pi/3$ ومركزه النقطة الصامدة ϖ ذات اللاحقة

$$z_\varpi=\frac{1-i}{1-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{1-i}{-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i)\times i\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) $A'=S(A)$ يعني $z_{A'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)\times i+1-i=-\sqrt{3}+1$

$B'=S(B)$ يعني :

$$z_{B'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)\times(1-i)+1-i=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(-2+\sqrt{3}\right)i$$

$C'=S(C)$ يعني :

$$z_{C'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)\times(-1)+1-i=\left(-\sqrt{3}-1\right)i$$

ب) بما أن النقط A',B',C' هم صور النقط A,B,C بالتشابه الذي نسبته 2 فإن (من خواص التشابه) :

$A'B'=2AB\ ,\ B'C'=2BC\ ,\ A'C'=2AC$ ومنه

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=2$ وهذا يعني أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ هما متشابهين .

$$z_G=\frac{3z_A+z_B-2z_C}{3+1-2}=\frac{3i+1-i-2(-1)}{2}=\frac{3}{2}+i$$

$$z_{G'}=\frac{3z_{A'}+z_{B'}-2z_{C'}}{3+1-2}=$$

$$=\frac{3\left(-\sqrt{3}+1\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(-2+\sqrt{3}\right)-2i\left(-\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

جـ) $G'=S(G)$ يعني : $z_{G'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_G+1-i$ ومنه

$$z_{G'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}+i\right)+1-i = \frac{5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

نلاحظ أن لاحقة G' مرجح الجملة $\{(A',3),(B',1),(C',-2)\}$

هي $z_{G'}$ لاحقة صورة G بالتشابه S وهذا يعني أن التشابه يحافظ

على مرجح الجملة . 4) لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

بما أن G هو مرجح الجملة $\{(A,3),(B,1),(C,-2)\}$ فإن :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = (3+1-2)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$

نعلم أن $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}$ ومنه $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MG}$ يكافئ

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MG}$ ومنه $\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{GM}$.

التحويل T يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث $\overrightarrow{GM'}=-\overrightarrow{GM}$

هو تناظر مركزي مركزه النقطة G.

رب اشرح لي صدري و يسر لي أمري و احلل عقدة من لساني يفقهوا قولي

تمارين مقترحة للحل

تمرين01

I) ليكن f التحويل النقطي من المستوي المركب و الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}(1-i)$.

1) عين لاحقة ϖ النقطة الصامدة بالتحويل f .

2) ما طبيعة التحويل f ؟ 3) برهن أن المثلث $\varpi MM'$ قائم في M .

II) نعتبر التحاكي h الذي مركزه $I(1;0)$ و نسبته (-2) و

الدوران r الذي مركزه $B(0;1)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين العناصر المميزة للتحويلين التاليين: $f = r\circ h$ و $g = h\circ r$

تمرين02

في مستوي الأعداد المركبة المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب :

$z_0 = i$ ، $z_1 = -1+i$ ، $z_2 = 1+2i$.

1) أ- برهن على وجود تشابه مباشر مركزه A و يحول B إلى C .

ب – أعط قيس الزاوية و النسبة لهذا التشابه.

2) ليكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي هي مراكز التشابهات المباشرة و التي نسبتها $\sqrt{2}$ و تحول النقطة B إلى C

- عين المجموعة (Γ) .

تمرين03

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لكل عدد مركب $z=x+iy$ نرفق له النقطة $M(x;y)$.

1) عين المجموعة (D) مجموعة النقط M من المستوي و التي تحقق : $|z-1|=|z-(1+\sqrt{3})+i|$.

2) نعتبر التحويل f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-iz+(3-i)$.

أ- عين طبيعة التحويل f و حدد عناصره المميزة.

ب – عين المجموعة (D') صورة (D) بالتحويل f .

تمرين04

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لكل نقطة $M(x;y)$ نرفق لها العدد المركب $z=x+iy$.

$A(1;0)$ ، $B(0;1)$ نقطتان من المستوي.

1) نعتبر التشابه المباشر S_1 الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم) و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. – عين الكتابة المركبة لـ S_1 .

2) ليكن A' و B' صورتا النقطتين A و B بالتحويل S_1 .

أ- برهن على وجود تشابه مباشر S_2 يحول A إلى B' و B إلى A' . حدد عناصره المميزة.

ب – أكتب العبارة التحليلية لـ S_2 (x' و y' بدلالة x و y)

جـ -استنتج معادلة صورة المستقيم (D) الذي معادلته $x-y+1=0$ بالتحويل S_2 .

تمرين05

نعتبر التشابهين المباشرين S_1 و S_2 المعرفين بالكتابة المركبة كما يلي:

$S_1 : z'=(1+i)z+1$ ، $S_2 : z'=-\frac{i}{2}z-i$

1) عين العناصر المميزة للتشابهين. 2) بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ اكتب x' و y' بدلالة x و y في S_1 و اكتب x' و y' بدلالة x و y في S_2.

3) حدد العناصر المميزة للتحويل $S_2 \circ S_1$.

تمرين06

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- عين في كل حالة من الحالات التالية طبيعة و العناصر المميزة للتحويل f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'.

1) $z'=(1-i)z+i$ ، 2) $z'=-{}^{1}\!/_{2}\,z+1-i$

3) $z'=(1+\sqrt{3}i)z-i$ ، 4) $z'=2(1+i)z+i-1$.

تمرين07

تعطى العبارات التحليلية للتحويلات النقطية h ، r ، S ، T.

$$r:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1 \end{cases} \quad ، \quad h:\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y+3 \end{cases}$$

$$T:\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases} \quad ، \quad S:\begin{cases} x'=\sqrt{2}(x+y)+1 \\ y'=\sqrt{2}(-x+y)-1 \end{cases}$$

1)أكتب العبارة المركبة لكل تحويل ، ثم عين طبيعة وعناصره المميزة.

تمرين08

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط : $A(1;0)$ ، $B(2;0)$ ، $C(1;1)$

1) عين نسبة و زاوية التشابه الذي مركزه B و يحول A إلى C .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1-i)z+2i$

ـ ما طبيعة التحويل ؟ ما طبيعة المثلث BMM' ؟

تمرين09

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$. 1) ما طبيعة التحويل T ؟ ما هي عناصره المميزة ؟ 2) لتكن النقطة M_1 ذات اللاحقة $z_1=\sqrt{3}+i$.

عين z_2 و z_3

لاحقتي M_2 و M_3 حيث: $T(M_1)=M_2$ و $T(M_2)=M_3$.

3)احسب العدد المركب $\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $M_1M_2M_3$

4) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة O (مبدأ المعلم و زاويته $\pi/3$

ـ عين التحويل S حيث: $S=T\circ r$ وما هي عناصره المميزة؟

تمرين10

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-5+6i$ ، $z_B=-7-2i$ ، $z_C=3-2i$.

1) تحقق أن النقطة f ذات اللاحقة $z_F=-2+i$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

2) لتكن H النقطة ذات اللاحقة (-5) . عين العناصر المميزة للتشابه المباشر الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة H .

3) لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ، عين لاحقة النقطة G صورة I بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته $K=2/3$.

تمرين11

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

النقط : $A(0;1)$ ، $B(0;2)$ ، $C(1;1)$.

1) عين زاوية و نسبة التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C .

2) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z ، z' حيث: $M' = S(M)$. عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$.

3) r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين العبارة المركبة للدوران r . ب- عين لاحقة النقطتين D و E المعرفتين بـ: $r(B) = D$ و $r(E) = C$.

جـ - عين العبارة المركبة للتحويل f المعرف بـ: $f = S \circ r$
و استنتج عناصره المميزة.

تمرين12

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر التحويلين r و S اللذان يحولان النقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z إلى النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث:

$$r : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \quad ، \quad S : \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) أكتب z' بدلالة z في كل من التحويلين r و S .

2) استنتج الطبيعة و العناصر المميزة لكل من التحويلين r و S

3) نعتبرالتحويل $f = S \circ r$. أ- أكتب العبارة المركبة للتحويل f .

ب- عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل f .

جـ ما طبيعة التحويل f ؟

تمرين13

تذكير: إذا كان S تشابه مباشر مركزه النقطة ذات اللاحقة z_0 و نسبته k و زاويته θ فإن : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-2i$ و زاويته $\pi/6$ و نسبته 2 .

2) نعتبر التحويل r الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' + 2i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 2i)$. أ- ما طبيعة التحويل r و ما هي عناصره المميزة؟ .

تمرين14

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A = 1 - i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 3 - i$ ، $z_D = 2i$.

1)عين العبارة المركبة للتشابه S المعرف بـ:
$S(A) = C$ ، $S(B) = D$.

2) عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه A و زاويته $\pi/2$.

3) عين العبارة المركبة ثم العبارة التحليلية التحويل f المعرف بـ: $f = S \circ r$. 4) عين معادلة صورة الدائرة (C) التي مركزها $\varpi(1;2)$ و نصف قطرها $2cm$ بالتحويل f .

الجداء السلمي

■ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف: الجداء السلمي في الفضاء لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل مستو يحتوي هذين الشعاعين .

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

■ حالات خاصة:

- إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه فإن :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$)

- إذا كان الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان اتجاههما متعاكسان

فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$)

- يرمز للجداء السلمي $\vec{u}.\vec{u}$ بـ $\|\vec{u}\|^2$ ومنه : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

■ خواص الجداء السلمي:

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ أشعة من الفضاء ، λ عدد حقيقي.

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$. 2) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

3) $(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$. 4) $\vec{u}.(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$

من خواص الجداء السلمي نستنتج ما يلي :

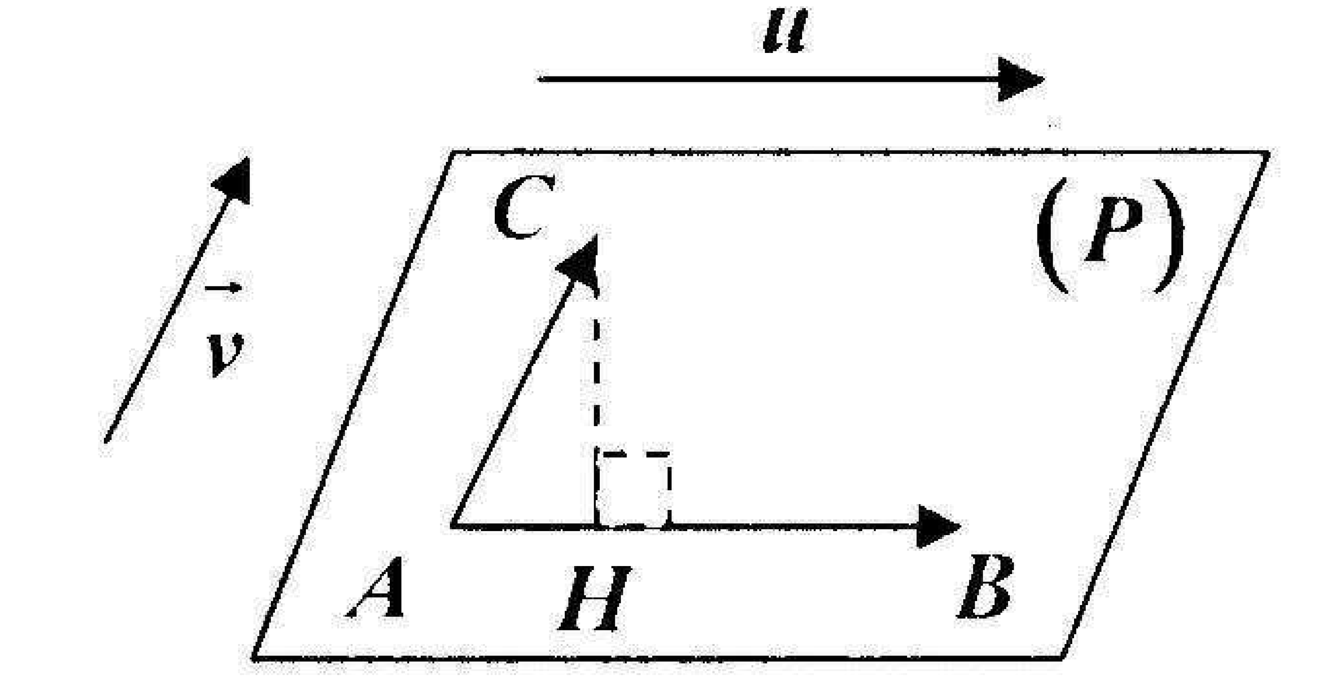
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ، $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

■ الجداء السلمي و الإسقاط العمودي :

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ، A ، B ، C ثلاث نقاط حيث:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) . يسمى الشعاع $\overrightarrow{AH}=\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.



نستطيع أن نبرهن أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان وكان $\vec{v'}$ هو المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v'}$

نستنتج أن : إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان متعامدا ن فإن : $\vec{u}.\vec{v}=0$.

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعان غير معدومين وكانت C' و D' المسقطا ن العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

▪ العبارة التحليلية للجداء السلمي :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

$\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعان .

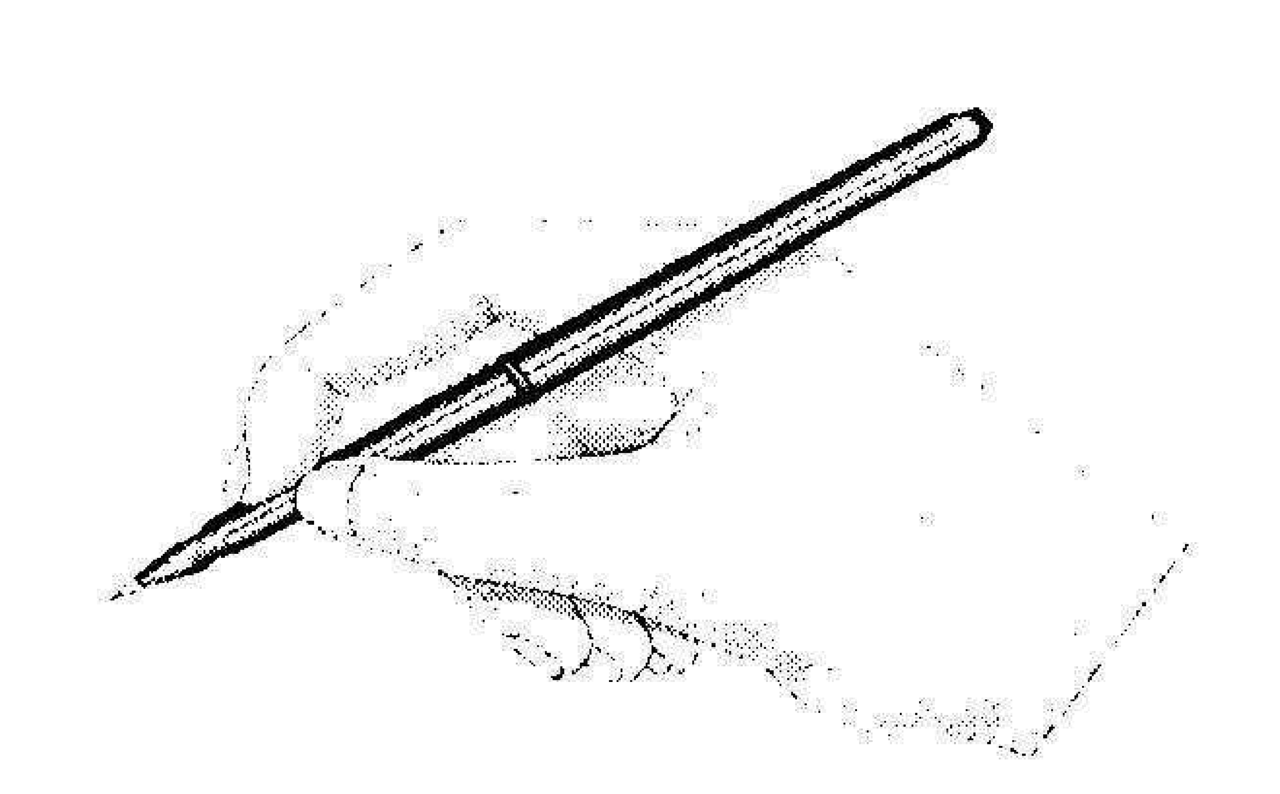
لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نستنتج أن:

1) $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ومنه : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



المستقيمات والمستويات في الفضاء

▪ المستقيمات في الفضاء :

- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيهي له .

$M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. وهذا يعني أن :

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و له شعاع توجيهي $\vec{u}(a;b;c)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث:

$$(S)\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$. الجملة (S) تسمى بالتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في الأساس $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و يسمى العدد الحقيقي t بالوسيط .

تمثيل وسيطي لقطعة مستقيم ، نصف مستقيم:

A و B نقطتان من الفضاء ، نرمز بـ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و يقبل $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيهي له هو :

$$(S)\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$ مع $t\in\mathbb{R}$

- التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ ، يتم بأخذ $t\in[0;1]$ في الجملة (S) .
- التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$ هو الجملة (S) مع $t\in[0;+\infty[$.

■ استعمال المرجح:

A و B نقطتان من الفضاء .

- المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A و B .
- القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجيح للنقطتين A و B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة.

■ معادلات ديكارتية لمستقيم:

(D) مستقيم يمر بالنقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له .

$M(x;y;z)\in(D)$ يعني أن: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ مع $t\in\mathbb{R}$

ومنه : $\begin{cases}x-x_0=ta\\ y-y_0=tb\\ z-z_0=tc\end{cases}$ و هذا يعني أنه إذا كان $abc\neq 0$ فإن:

أي: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$\begin{cases}b(x-x_0)-a(y-y_0)=0\\ c(x-x_0)-a(z-z_0)=0\end{cases}$ و هذه الجملة تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) .

إذا كان أحد المقامات منعدما فإن البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا .

مثلا: إذا انعدم b أي $b=0$ فإن :

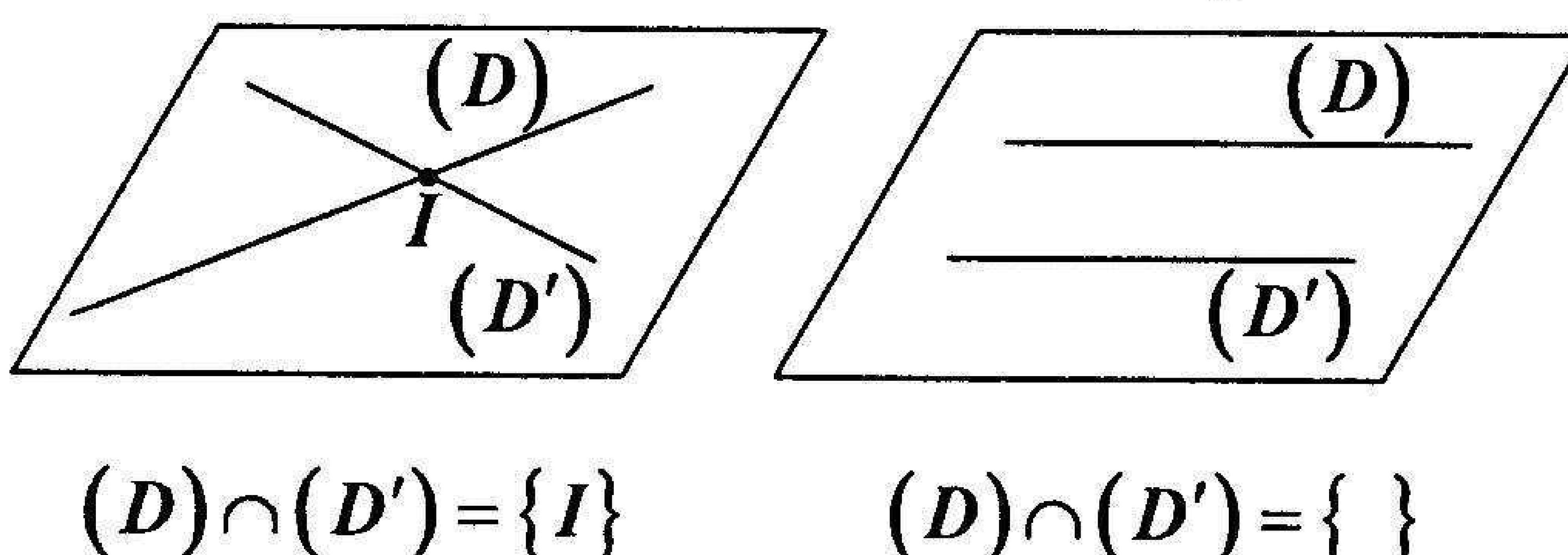
$$\begin{cases}c(x-x_0)-a(z-z_0)=0\\ y=y_0\end{cases}$$

الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء:

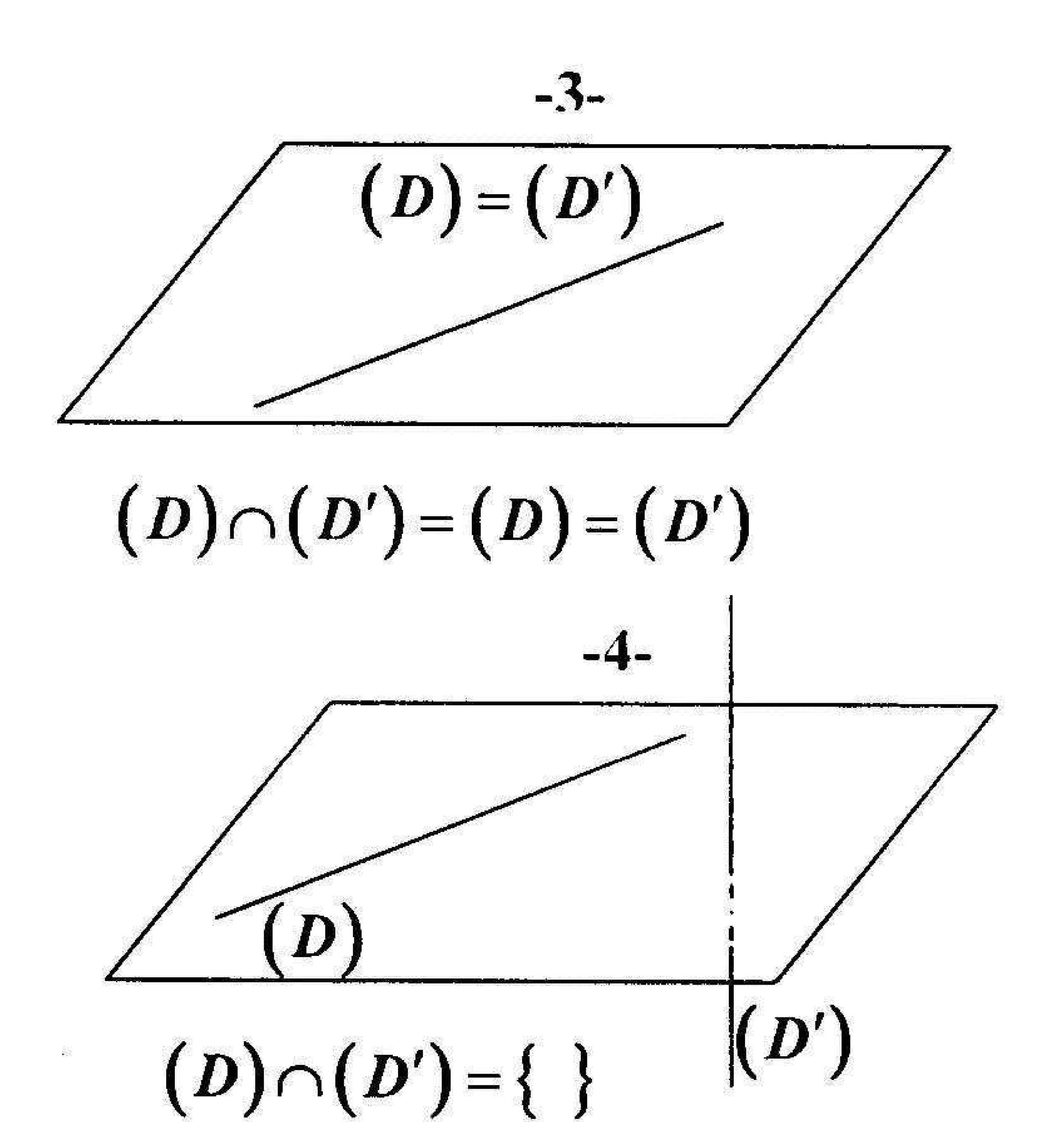
(D) و (D') مستقيمان في الفضاء. توجد أربع حالات ممكنة:

في الحالات الثلاثة : -1- ، -2- ، -3- ، (D) و (D') هي من نفس المستوي .

-1- -2-



$(D)\cap(D')=\{I\}$ $(D)\cap(D')=\{\ \}$



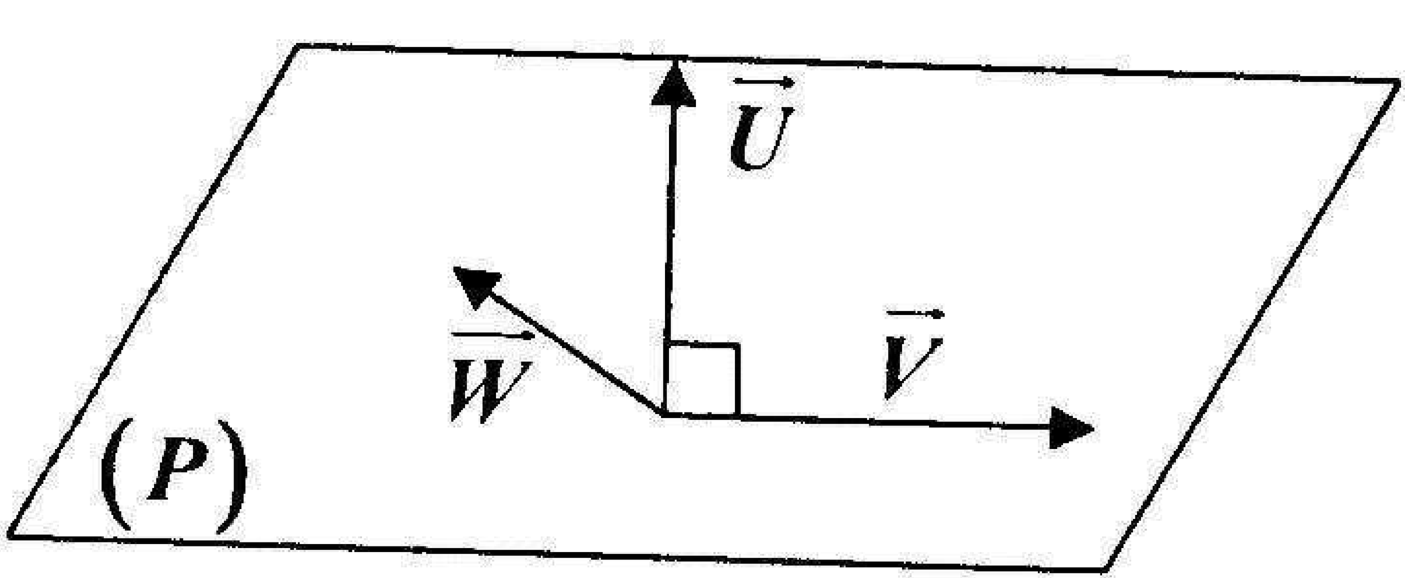
المستقيمان (D) و (D') من مستويين مختلفين

المعادلةالديكارتية لمستو :

- الشعاع الناظم لمستو

<u>تعريف</u>: (P) مستو في الفضاء . نقول أن الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) إذا كان من أجل كل نقطتين M و N من المستوي (P) فإن $\vec{u}.\overline{MN}=0$

نقول أيضا أن الشعاع $\vec{u}$ عمودي على المستوي (P)



نعلم أن كل شعاع غير معدوم و عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P)، أي شعاع ناظمي لـ (P). نستعمل هذا التعريف لتعيين شعاع ناظمي لمستو .

الفضاء منسوب لمعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $ax+by+cz+d=0$ و $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستو، و المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تسمى معادلة ديكارتية له.

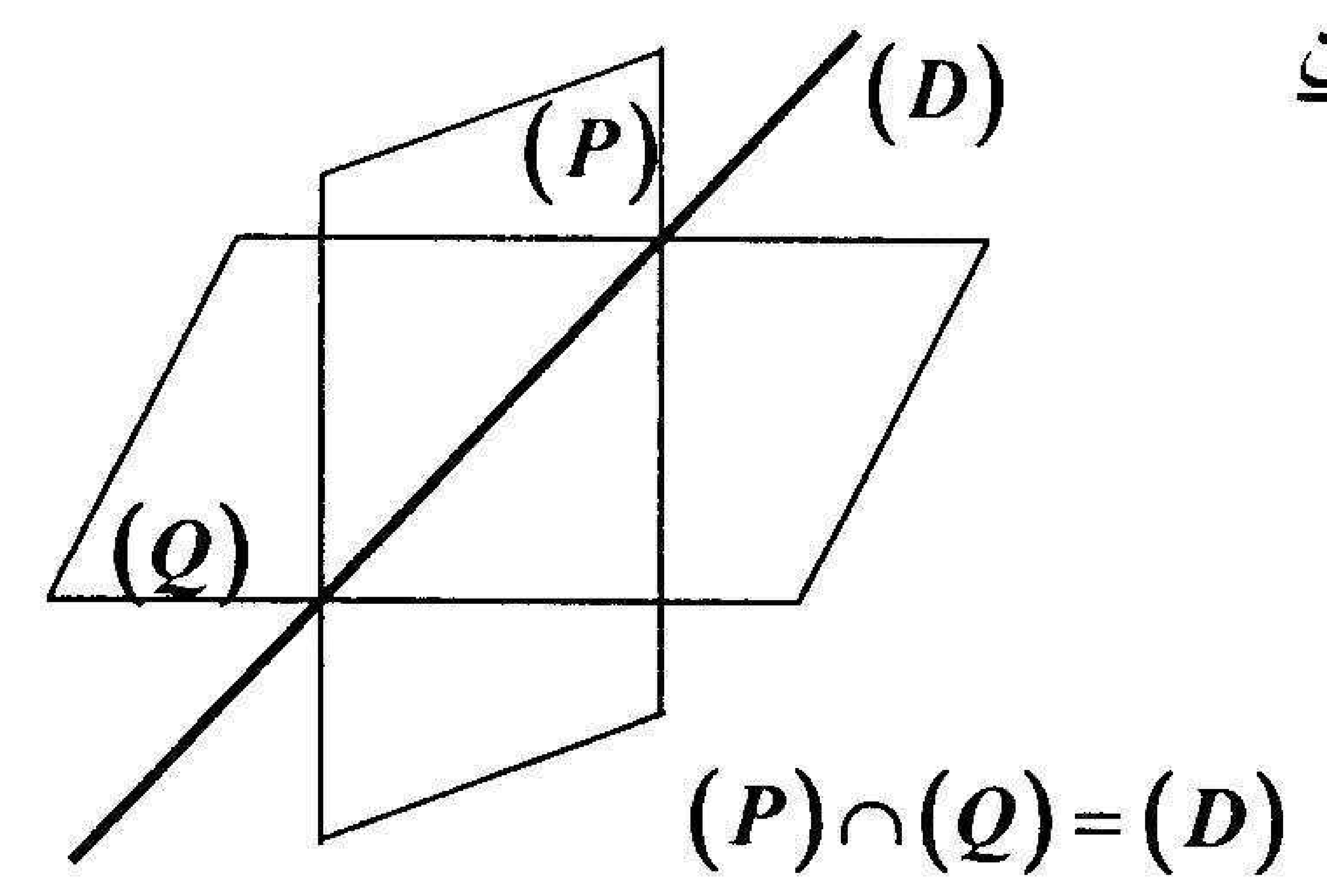
- كل مستو ،حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+cz+d=0$.

حالات خاصة:

- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي : $z=0$
- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي : $x=0$
- المعادلة الديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي : $y=0$

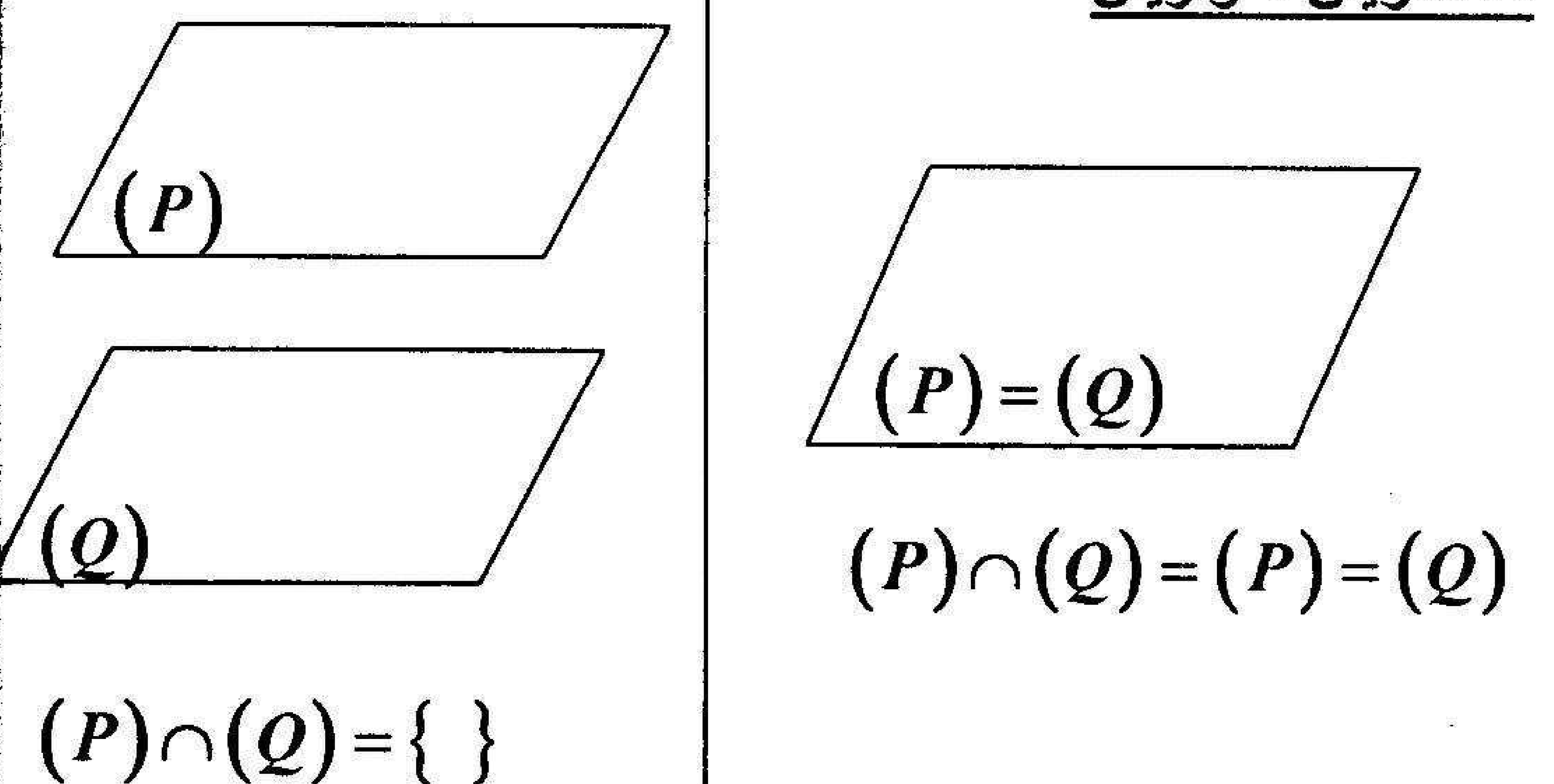
الوضعية النسبية لمستويين:

<u>المستويان متقاطعان</u>



$(P)\cap(Q)=(D)$

<u>المستويان متوازيان</u>



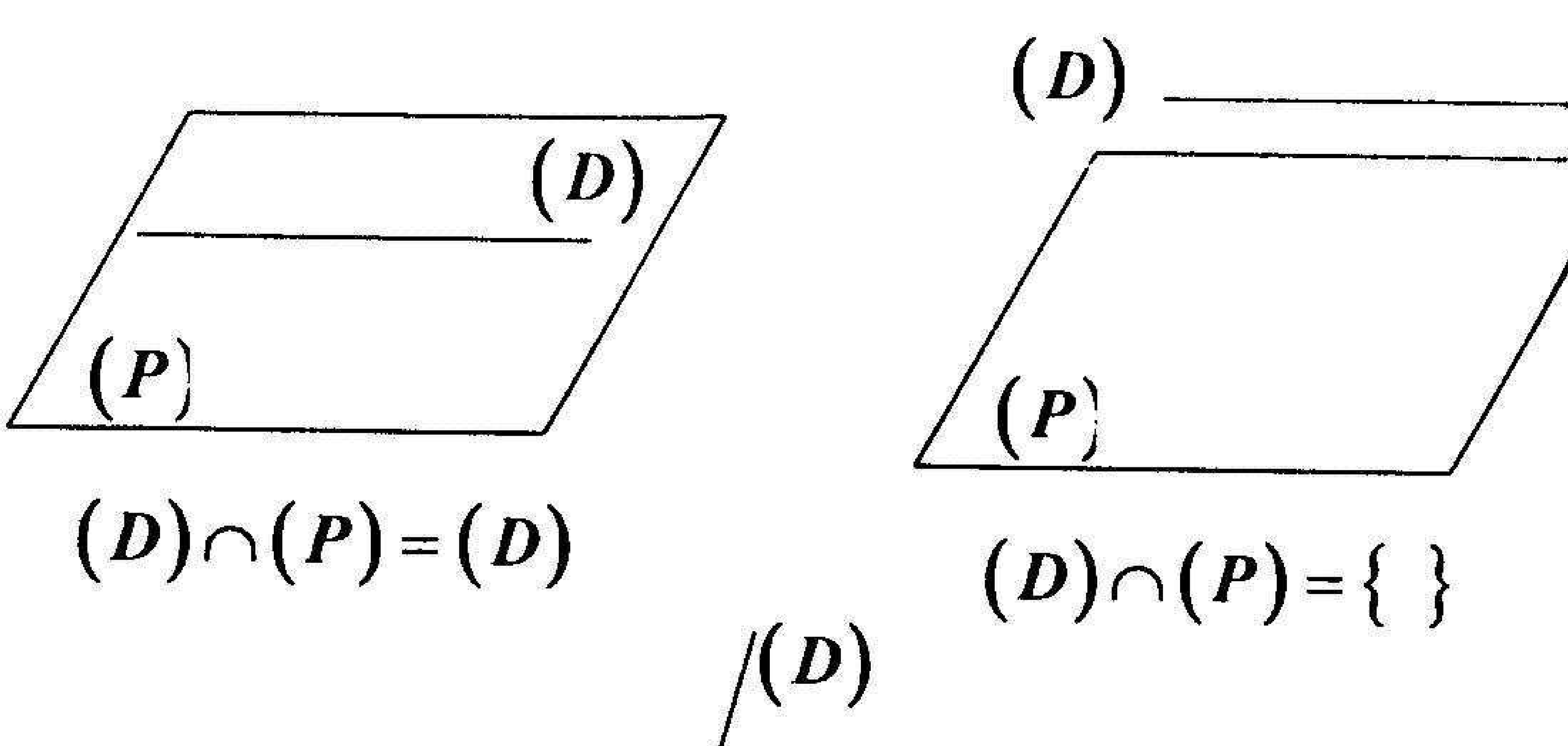
$(P)\cap(Q)=(P)=(Q)$

$(P)\cap(Q)=\{\ \}$

ملاحظة: تقاطع ثلاثة مستويات يكون مستقيما أو نقطة أو مجموعة خالية .

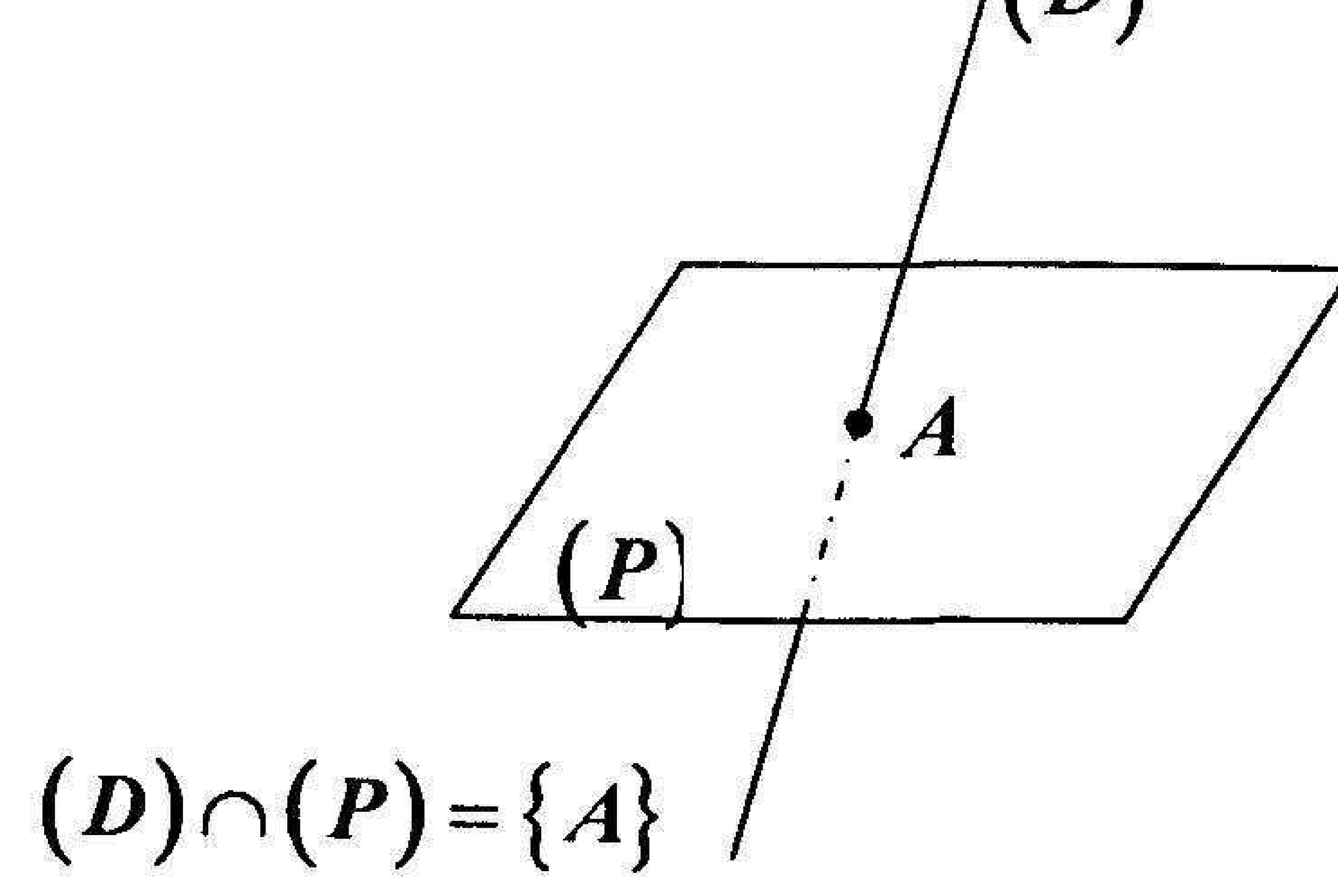
- ## الوضعية النسبية لمستو و مستقيم:

(P) مستو و (D) مستقيم في الفضاء ، لدينا ثلاثة حالات ممكنة



$(D)\cap(P)=\{\ \}$

$(D)\cap(P)=(D)$



$(D)\cap(P)=\{A\}$

خاصيات تتعلق بشرط تعامد و توازي المستقيمات و المستويات في الفضاء

1) (D) و (Δ) مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ على الترتيب .

- $(D)\perp(\Delta)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$

- $(D)//(\Delta)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

2) (D) مستقيم شعاعه التوجيهي $\vec{u}(a;b;c)$ و (P) مستو حيث $\vec{v}(a';b';c')$ شعاع ناظمي له .

- $(P)//(D)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$
- $(D)\perp(P)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$

3) (P) و (Q) مستويان $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ ناظميان لهما على الترتيب . - $(Q)//(P)$ يكافئ $\vec{u}//\vec{v}$ يكافئ

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ (متوازيين تماما)

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ (منطبقين)

- $(Q)\perp(P)$ يكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$

■ **تقاطع مستويين**

(P) مستو معادلته $ax+by+cz+d=0$ و (Q) مستو معادلته $a'x+b'y+c'z+d'=0$

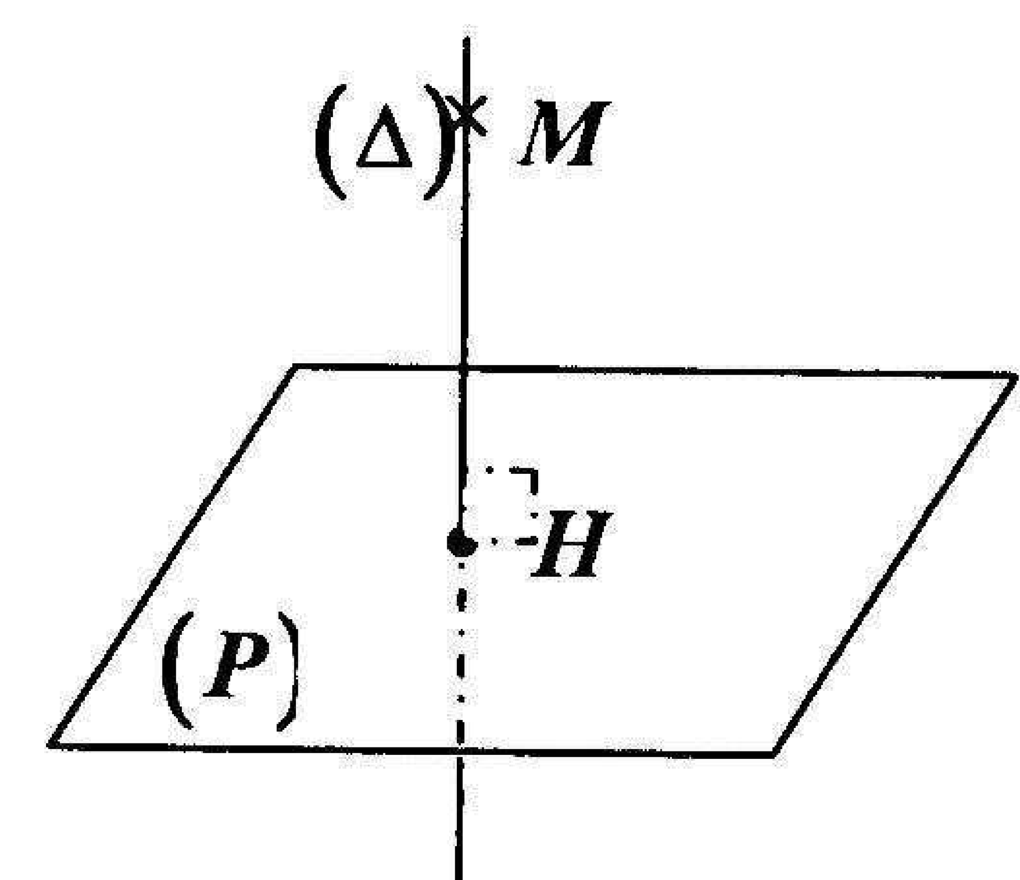
إذا كان المستويين (P) و (Q) غير متوزيين فهما يتقاطعان وفق مستقيم (D) معرف بجملة المعادلتين الديكارتيتين للمستويين

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

■ **المسافة بين نقطة و مستو:**

(P) مستو ، M نقطة من الفضاء. المستقيم (Δ) العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع (P) في H . تسمى النقطة H بالمسقط العمودي للنقطة M على (P).

طول القطعة المستقيمة $[MH]$ يمثل المسافة بين النقطة M و المستوي (P) و نرمز لها بـ: $d=d\left(M;(P)\right)$



في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المسافة بين النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي: $d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

تمارين محلولة

تمرين01

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر الشعاعين $\vec{u}(2;1;-2)$ و $\vec{v}(-3;0;4)$

1) احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$. 2) احسب $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.

3) عين مجموعة الأشعة من الفضاء التي تعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

تمرين02

نعتبر الأشعة $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ و $\vec{v}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\vec{w}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1) برهن بأن $\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ هو أساس متعامد و متجانس.

2)عين العدد الحقيقي m كي $\vec{n}\left(1;m;m+1\right)$ يعامد $\vec{u}$.

تمرين03

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبرالنقط $A\left(\lambda;2;3\right)$ ، $B\left(2;0;-1\right)$ ، $C\left(1;4;0\right)$ ، $D\left(0;0;1\right)$. 1) احسب بدلالة λ الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ كي يكون المثلث ABC قائم في C .

3) في ما يأتي نأخذ $\lambda=-4$.

أ) بين أن النقط A ، B ، C ، D لا تنتمي إلى نفس المستوي.

ب) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة

$\left\{(C;-2),(B;+1),(A;2)\right\}$.

جـ) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء و التي

تحقق ما يلي: $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MD}=0$

د) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (E)

تمرين04

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء .

نعتبر الجملة $\left\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\right\}$.....*

1) عين قيم α كي تقبل الجملة * النقطة G_α مرجحا.

2) عين قيمة α كي تقبل الجملة * النقطة G المعرفة بالعلاقة

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ مرجحا.

3) نفرض أن $\alpha=2$ و أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة و لتكن I منتصف $[AC]$ و $BI=4$.

أ) برهن في هذه الحالة أن النقطة G هي منتصف $[BI]$.

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق :

$MB^2+MI^2=16$.

تمرين05

I) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . m وسيط حقيقي.

1) ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة $\{(A;m),(B;m+1),(C;2m-1)\}$ مرجحا G_m ؟

2) أنشئ بطريقتين مختلفتين G_1 مرجح الجملة من أجل $m=1$.

3) عين المجموعتين E_1 و E_2 من النقاط و المعرفتين بـ:

$$E_1=\left\{M\in E_1 / \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|\right\}$$

$$E_2=\left\{M\in E_2 / \left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MC}=0\right\}$$

II) نزود الفضاء بمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نفرض أن

$A(1;1;0)$ ، $B(-1;1;0)$ ، $C(0;-1;1)$

1- أ - بين أن النقط A ، B ، C تشكل مثلثا متساوي الساقين.

ب – احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقيس الزاوية $A\hat{C}B$.

جـ - احسب : $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)^2$ ، $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)$ ، $\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

2) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

تمرين06

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

لعتبر المستقيمات الثلاثة (D_1) ، (D_2) ، (D_3) حيث:

$$(D_1):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}\ ،\ (D_2):\begin{cases}x=5-4t'\\ y=-2t'\ ;\ t'\in\mathbb{R}\\ z=-1+2t'\end{cases}$$

$$(D_3):\begin{cases}x-y-2z=0\\ 2x+3y+5=5\end{cases}$$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) .

2) بين أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان.

3)) بين أن المستقيمان (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي.

4) (Δ) مستقيم يمر بالنقطة $A(5;-1;4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(3;1;1)$. بين أن (D_1) يقطع (Δ) في نقطة يطلب تعيينها .

تمرين07

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقاط $A(-1;0;2)$ ، $B(-3;2;4)$ ، $C(1;-1;-2)$ ، $D(2;3;-1)$. 1) برهن أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة. 2) برهن أن الشعاع $\vec{n}(3;2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي

(ABC) . 3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

4) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يوازي (ABC) و يمر بالنقطة D .

تمرين08

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(1;-1;-4)$ ، $B(2;0;5)$ ، $C(2;-1;1)$.

1) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) الذي يمر بالنقطة C و شعاعه التوجيهي $\vec{u}(1;2;-1)$.

2) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB).

3) تحقق بأن المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) ذو المعادلة $5x+4y-z-5=0$. 4) عين تقاطع (D) والمستوي (P)

تمرين09

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر النقاط $A(-1;2;1)$ ، $B(3;-2;3)$ ، $C(2;1;-1)$.

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2) نعتبر المستوي (P_m) ذو المعادلة الديكارتية :

$$(m+1)x+my-2z+m-1=0$$

- عين قيمة العدد الحقيقي m حتى يكون :

أ- (P_m) يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة الديكارتية :

$2x+y-2z+3=0$. هل يمكن أن يكون (P_m) منطبقا على (Q)؟ ب- عين قيمة m من أجلها يكون (P_m) يعامد المستوي (R) ذو المعادلة $3x+2y-z+1=0$

تمرين10

(P) و (R) مستويان معادلتاهما على الترتيب : $x+y-z=0$ و $-x+y+2z+1=0$. ليكن (Δ) المستقيم الذي يمثل تقاطع المستويين (P) و (R) . $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

1) أ- تحقق أن $x=\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$.

ب – عين شعاع توجيه المستقيم (Δ) .

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (π) الذي يشمل $A(1;0;0)$ و يعامد كل من (P) و (R) .

3) عين تقاطع المستوي (π) مع المستقيم (Δ) .

تمرين11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) أكتب معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه $\varpi(1;2;-1)$ و يشمل النقطة $A(2;0;3)$.

2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (S) في A .

3) أثبت أن المستوي (π) الذي معادلته $x+2y+2z+15=0$ يمس السطح الكروي (S') ذو المعادلة $x^2+y^2+z^2-25=0$

ثم عين إحداثيات نقطة التماس .

تمرين12

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

نعتبر النقاط $A(-1;2;-1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $\varpi(2;1;0)$.

1) أعط تميلا وسيطيا للمستقيم (AB) . 2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(AB\varpi)$. 3) نعتبر في الفضاء (E) الكرة (S) المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$.

أ ـ عين نصف قطر الكرة (S) و حدد مركزها .

ب ـ عين تقاطع الكرة (S) و المستوي $(AB\varpi)$.

جـ - بين أن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما .

تمرين13

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل $A(-3;5;1)$ و العمودي على المستوي (P) الذي معادلته: $x-2y+3z=0$.

2) عين تقاطع (D) مع المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي هو :

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2t+5 \end{cases}$$

3) عين تقاطع (D) مع المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تمرين14

1) تحقق أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان حيث:

$$(D):\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases} \text{ و } (D'):\begin{cases} x=4-5t' \\ y=3-2t' \quad ; \quad t'\in\mathbb{R} \\ z=-1+2t' \end{cases}$$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (D) و (D') .

3) بين أن المستقيم (D') يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة :

$2x-2y+3z-1=0$.

تمرين15

نعتبر المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي
$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=t \end{cases}$$

مع $t\in\mathbb{R}$ و المستقيم (D') المعرف بما يلي:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

1) أكتب تميلا وسيطيا للمستقيم (D') ثم بين أن (D) يوازي (D') . هل المستقيمان (D) و (D') متوازيان تماما؟ .

2) $A(1;2;-1)$ نقطة من الفضاء . - احسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D) ثم استنتج المسافة بين

النقطة A و المستقيم (D) .

تمرين16

(P) مستو معادلته الديكارتية $2x+y-3z-5=0$.

1) عين إحداثيات نقاط تقاطع المستوي (P) مع محاور المعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. 2) نعتبر المستويين (Q) و (R) حيث:

$(Q): x+3y+z-10=0$ و $(R): -2x+5y+9z-13=0$

أ) بين أن المستويين (Q) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين نقطة منه و شعاع توجيهه .

ب) بين أن المستوي (P) يشمل المستقيم (D) .

جـ) استنتج تفسيرا هندسيا لحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 \\ -2x+5y+9z-13=0 \\ x+3y+z-10=0 \end{cases}$$

تمرين17

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(2;0;5)$ ، $C(-1;2;2)$.

1) تحقق أن النقاط A ، B ، C ليست إستقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$.

2) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;1),(C;2)\}$.

أ – عين إحداثيات النقطة G . ب- بين أن مجموعة النقاط

$M(x;y;z)$ و التي تحقق $-2MA^2+MB^2+2MC^2=13$

هي كرة (S) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ - تحقق أن النقطة $I(0;-2;2)$ تنتمي إلى (S) و أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (R) الماس للكرة (S) عند النقطة I .

3) أدرس تقاطع المستويين (R) و (ABC) .

تمرين18

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط $A(0;1;1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $C(2;-1;-1)$ ، $D(-1;2;1)$

و المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x-y+2z-1=0$ و

المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=\lambda+2 \\ z=\lambda+1 \end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك. 1) المستوي (P) هو :

ج1) (ACD) . ج2) (ABC). ج3) (BCD) .

2)شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو:

ج1) $\vec{u}(2;1;1)$. ج2) $\vec{u}(2;-1;1)$. ج3) $\vec{u}(2;1;2)$.

3) المستقيم (Δ) : ج1) يوازي (P) . ج2) يقطع (P).

ج3) يعامد (P)

4) ج1) $A\in(\Delta)$. ج2) $A\in(P)$. ج3) $A\in(oz)$.

5) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي:

ج1) $\frac{\sqrt{6}}{5}$. ج2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. ج3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6) المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة ذات الإحداثيات:

ج1) $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$. ج2) $(1;3;1)$. ج3) $\left(1;\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

تمرين19

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(1;0;3)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(3;1;1)$.

1) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+2y+2z-7=0$

2) ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $2x-2y+z-5=0$.

أ - بين أن المستوي (Q) عمودي على المستوي (ABC).

ب- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يمثل تقاطع المستويين (Q) و (ABC) .

جـ - احسب المسافة بين النقطة $D(2;-1;1)$ و المستوي (Q).

تمرين20

حل الجملة و فسر هندسيا النتيجة . $\begin{cases}2x+y-z=5\\-3x+2y-1=0\\4x-3y+2z=-4\end{cases}$

تمرين21

نعتبر المستويين (P) و(Q) حيث:

$(P):-2x+y-5z+5=0$ ، $(Q):4x+y+4z=7$

1) بين أن المستويين (P) و(Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء التمثيل الوسيطي له.

2) $B(1;0;-1)$ نقطة من الفضاء و H مسقطها على (Δ) .

احسب إحداثيات H و استنتج المسافة بين النقطة B و (Δ) .

3) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل $A(2;-1;0)$ و $\vec{u}(-3;4;2)$ شعاع ناظمي له .

4) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P) و(Q) و (R).

تمرين22

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(1;1;-2)$ ، $B(2;1;0)$ ، $C(0;-1;-1)$.

1)برهن أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) عين الشعاع $\vec{n}$ حيث: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ، و استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .3) تحقق بأن المستوي (P) ذو المعادلة $-4x+3y+2z-1=0$ يوازي المستوي (ABC) .

4) بين أن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 2 \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda + 1 \end{cases}$ يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تعيينها

تمرين23

نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) المعرفين كما يلي :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \text{ ، } (D): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = z - 2$$

1) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان و عين تقاطعهما.

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل كل من المستقيمين (D) و (Δ) .

3) احسب بعد النقطة $A(1;-1;0)$ عن المستقيم (D) .

4) عين تقاطع (D) مع المستوي $P\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

تمرين24

نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

المستويات (P_m) التي معادلاتها:

$2x + (m-1)y + 2mz + m - 2 = 0$. 1) برهن أنه من أجل كل قيمة للعدد الحقيقي m فإن (P_m) هو مستوي.

2) برهن أن جميع المستويات (P_m) تقبل مستقيما مشتركا (D)

يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي .

3) أكتب معادلة المستوي (P_m) الذي يوازي المستقيم (Δ) ذو المعادلات : $\begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = -z - 2 \end{cases}$

تمرين25

نعتبر المستقيم (D) و المستوي (P) حيث:

$$(P): x + 2y - z + 1 = 0 \text{ ، } (D): \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \ ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

1)أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يعامد (P) ويشمل (D) . 2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يوازي (P) و يشمل $B(1;0;-1)$.

3) احسب المسافة بين النقطة B والمستوي (Q) .

تمرين26

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نعتبر النقاط $A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ ، $D(-5;0;1)$

1) أ – تحقق أن الشعاع $\vec{u}(4;2;3)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) – أعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على (ABC) و المار بالنقطة D . ب- استنتج إحداثيات النقطة H مسقط D

على المستوي (ABC) .

3) أ – عين تقاطع المستوي (ABC) مع المحورين (ox) و (oy) .

ب- عين تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (xoy) .

تمرين27

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقاط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;4)$ ، $C(1;0;2)$ و المستوي (P) ذو المعادلة $3x+y-2z+1=0$.

1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار بالنقطتين A و B .

2) بين أن (D) محتوى في المستوى (P) .

3) ليكن (Q) المستوي المار من النقطة B و $\vec{v}(1;1;2)$ شعاع ناظمي له. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

4) بين أن (P) و (Q) متعامدان و يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء تمثيله الوسيطي.

5) لتكن H مسقط النقطة C على (Δ) .

احسب إحداثيات H و المسافة CH .

6) لتكن الكرة (S) ذات المركز C و نصف قطرها 2 .

أ- أكتب معادلة ديكارتية للكرة (S) .

ب – أدرس الوضعية النسبية لكل من (S) و (Q) .

تمرين28

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(1;-1;2)$ و الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطة A و شعاع توجيهه $\vec{u}$.

2) أكتب المعادلة الديكارتية للكرة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

3) أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (R) الماس للكرة (S) عند A .

تمرين 29

ليكن (D) مستقيم معرف بما يلي : $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

1) أكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) .

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته : $3x-2y+z-2=0$.

عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D) .

3) ليكن المستوي (Q) الذي معادلته : $2x-5y-3z+6=0$.

أ) بين أن (Q) يشمل (D) . ب) أعطي تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمثل تقاطع المستويين (P) و (Q) .

4) نعتبر الكرة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x=0$.

أدرس وضعية الكرة (S) بالنسبة إلى المستوي (P).

تمرين 30

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقاط : $A(-1;0;1)$, $B(1;1;0)$, $C(0;-1;-4)$, $D(-1;1;2)$.

1- أ) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC . جـ) احسب مساحة المثلث ABC

2- أ) عين الشعاع $\vec{u}$ حيث : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

جـ) تحقق بأن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$. د) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) . 3) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ) تحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي : $2x-5y+2z+3=0$. ب) أحسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) . جـ) استنتج مساحة المثلث (BCD).

تمرين 31

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1) احسب $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$ واستنتج أن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BDE) .

3) احسب المسافة بين النقطة H والمستوي (BDE)

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H و يعامد المستوي (BDE).

تمرين 32

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. ليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له والمستوي (Q) الذي معادلته الديكارتية : $x+2y-7=0$. 1) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدين

2) أثبت أن تقاطعهما هو المستقيم (D) الذي يشمل $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(2;-1;1)$. 3) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$. احسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين (P) و (Q) .

4) استنتج حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

تمرين 33

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(1;2;-3)$, $B(-3;1;4)$, $C(2;6;-1)$.

1) تحقق بأن النقاط A , B , C تعين مستوي (P) معادلته : $2x-y+z+3=0$. 2) لتكن ϖ النقطة التي إحداثياتها $(-1;3/2;1/2)$. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل ϖ والعمودي على المستوي (ABC) .

3) نعتبر المجموعة (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق ما يلي : $MA^2+MB^2=41$.

أ) تحقق بأن المجموعة (S) هي كرة مركزها ϖ ونصف قطرها 2 .

ب) احسب بعد ϖ عن المستوي (P) وادرس تقاطع (S) مع (P).

تمرين 34

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1;0;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(1;-1;1)$, $D(1;1;0)$

والمستوي (P) ذو المعادلة : $2x-y+z-1=0$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في ما يأتي :

1) معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-2z+1=0$

2) معادلة المستوي (ABD) هي : $2x-y+z-1=0$

3) $ABCD$ هو رباعي الوجوه .

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

5) المستقيم (AB) محتوى في المستوي ذو المعادلة : $-x+y+z+2=0$. 6) المستوي (Q) ذو المعادلة : $x+2y-z+1=0$ عمودي على المستوي (P) .

7) بعد النقطة A عن المستوي (P) هو 2 .

8) المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان .

9) ABD هو مثلث متساوي الساقين . 10) إحداثيات النقطة H مسقط C على (ABD) هي : $H(0;-1;2)$

تمرين 35

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ والمستقيم (D) المعرف كما يلي :

$$(D):\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad , t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$$

1- أ) أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و B .

ب) تحقق أن المستقيمين (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

2) (P) هو المستوي الذي يوازي (D) ويشمل (Δ) .

أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) وتحقق أن $\vec{u}(2;-2;1)$ هو شعاع ناظمي لـ (P).

3) (Q) يمثل مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق $AM=BM$.

بين أن (Q) هو مستوي يطلب إعطاء معادلته الديكارتية .

4) (S) يمثل سطح كروي معرف بمعادلته الديكارتية :

$x^2+y^2+z^2-18x-3y-18z+160=0$.

بين أن تقاطع (S) و (P) هي دائرة طول قطرها AB .

حلـول التـمارين

حل التمرين1

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times(-3)+1\times0+(-2)\times4=-14$

2) نعلم أن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u};\vec{v})$ ولدينا :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$

ومنه : $\cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=-\dfrac{14}{15}$.

3) ليكن $\vec{w}(a;b;c)$ شعاع من الفضاء . يكون الشعاع $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط : $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$ ومنه :

$\begin{cases}2a+b-2c=0\\-3a+4c=0\end{cases}$ هذه الجملة تقبل عدد غير منتهه من الحلول ،

بأخذ $a=4$ فإن $c=3$ و $b=-2$. إذن $\vec{w}(4\alpha;-2\alpha;3\alpha)$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$. ومنه مجموعة الأشعة التي تعامد كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي الأشعة التي توازي الشعاع $\vec{n}(4;-2;3)$.

حل التمرين2

1) $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2}=1$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+0\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

أيضا لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. بما أن :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

فإن $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ هو أساس متعامد ومتجانس .

2) $\vec{u}\cdot\vec{n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot m+0\cdot(m+1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+m)$

$\vec{u}\perp\vec{n}$ معناه $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ ومنه $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(m+1)=0$ ومنه $m=-1$

حل التمرين3

1) $\overrightarrow{AB}(2-\lambda;-2;-4)$, $\overrightarrow{AC}(1-\lambda;2;-3)$, $\overrightarrow{BC}(-1;4;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)+(-2)\cdot(2)+(-4)\cdot(-3)$

$=\lambda^2-3\lambda+10$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2-\lambda)\cdot(-1)+(-2)\cdot4+(-4)\cdot1=\lambda-14$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(1-\lambda)\cdot(-1)+2\cdot4+(-3)\cdot1=\lambda+4$$

2) يكون المثلث ABC قائم في C إذا تحقق : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
ومنه $\lambda+4=0$ و منه $\lambda=-4$.

3) – أ $A(-4;2;3)$, $B(2;0;-1)$, $C(1;4;0)$, $D(0;0;1)$
$\overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$, $\overrightarrow{AC}(5;2;-3)$, $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2)$.

تكون النقاط A , B ,C ,D من نفس المستوي إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي أي إذا وجد عددين حقيقيين x,y يحققان: $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ويكافئ :

$$\begin{cases}6x+5y=4 & (1)\\ -2x+2y=-2 & (2)\\ -4x-3y=-2 & (3)\end{cases}$$ *

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل كحل $x=\frac{5}{7}$ و $y=\frac{-2}{7}$ وهما لا يحققان (1)، إذن الجملة * ليست لها حل وبالتالي لا يوجد x و y يحققان $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ومنه النقاط A , B ,C ,D لا تنتمي إلى نفس المستوي .

ب) نعلم أن : $x_G=\dfrac{2x_A+x_B-2x_C}{2+1-2}=-8$

$y_G=\dfrac{2y_A+y_B-2y_C}{2+1-2}=-4$ ، $z_G=\dfrac{2z_A+z_B-2z_C}{2+1-2}=5$

جـ) بما أن G هو مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;-2)\}$ فإن :
$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$ ومنه :

$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$ يكافئ $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

إذن المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء هي الكرة التي قطرها $[GD]$. د) ليكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء ،
$M\in(E)$ يعني $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$ ونعلم أن :
$\overrightarrow{MG}(-8-x;-4-y;5-z)$ و $\overrightarrow{MD}(-x;-y;1-z)$
ومنه $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$ يكافئ :
$$(-8-x)(-x)+(-4-y)(-y)+(5-z)(1-z)=0$$
ومنه : $x^2+y^2+z^2+8x+4y-6z+5=0$ وهي المعادلة الديكارتية للمجموعة (E) .

حل التمرين4

1) الجملة $\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\}$ تقبل مرجح إذا كان $\alpha+(\alpha+2)+2\neq0$ ومنه : $\alpha\neq-2$.

2) إذا كان $\alpha\neq-2$ فإن الجملة $\{(C;2),(B;\alpha+2),(A;\alpha)\}$ تقبل مرجح النقطة G المعرفة بالعلاقة الشعاعية الآتية :
$(E)\quad \alpha\overrightarrow{GA}+(\alpha+2)\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ومنه $6\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

ومنه $6\overrightarrow{AG}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)$ ومنه :

$\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه $-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

بالمطابقة مع العلاقة الشعاعية (E) نجد $\alpha=1$.

3) – أ لدينا الجملة $\{(A;2),(B;4),(C;2)\}$. نعلم أن مرجح النقطتين $A(2)$ و $C(2)$ المرفقتين بالمعاملين المتساوين هو النقطة I منتصف $[AC]$ و المرفق بمجموع المعاملين أي 4 . إذن مرجح الجملة $\{(A;2),(B;4),(C;2)\}$ هو النقطة G مرجح الجملة $\{(I;4),(B;4)\}$ وهو يقع في منتصف $[BI]$.

ب) تعيين مجموعة النقاط M من الفضاء .

لدينا $MB^2+MI^2=16$ و G منتصف $[BI]$ أي : $\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GI}$

$$MB^2=\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MG}-GI\right)^2$$

$$=\overrightarrow{MG}^2-2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}^2$$

$$MI^2=\left(\overrightarrow{MI}\right)^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GI}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}^2$$

$$MB^2+MI^2=2\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{GI}^2=2MG^2+2GI^2=2MG^2+8$$

$MB^2+MI^2=2MG^2+8=16$. (لأن $GI=\frac{1}{2}BI=2$)

ومنه : $2\overrightarrow{MG}^2=8$ ومنه : $MG^2=4$. إذن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $MB^2+MI^2=16$ هي الكرة التي مركزها G ونصف قطرها 2 .

حل التمرين5

I. 1) الجملة $\{(A;m),(B;m+1),(C;2m-1)\}$ تقبل مرجح إذا كان $m+(m+1)+(2m-1)\neq 0$ ومنه $4m\neq 0$ ومنه $m\neq 0$.

2) إنشاء G_1 مرجح $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$

الطريقة الأولى: ننشئ مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(C;1)$ وهي النقطة H منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ثم ننشئ النقطة G_1 مرجح النقطتين $(H;2)$ و $(B;2)$ وهي تقع في منتصف $[BH]$

الطريقة الثانية:

النقطة G_1 مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$ هي معرفة بالعلاقة الشعاعية $\overrightarrow{G_1A}+2\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$ ومنه :

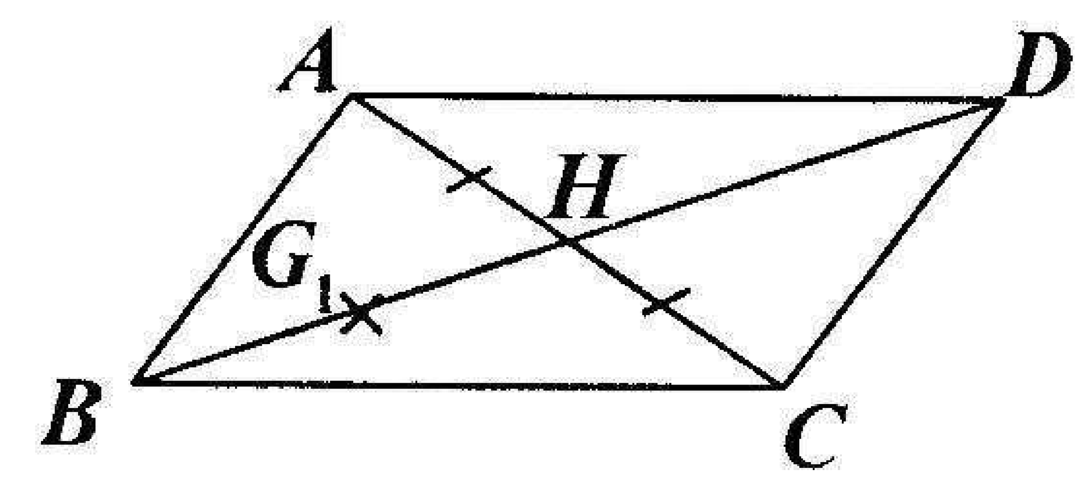
$\left(\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BA}\right)+2\overrightarrow{G_1B}+\left(\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}$ ومنه :

$4\overrightarrow{G_1B}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}$ ونعلم أن :

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ (أنظر إلى الشكل)

ومنه $4\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ ومنه $4\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BH}$ ومنه :

$\overrightarrow{BG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ وهذا يعني أن G_1 منتصف $[BH]$



- تعيين المجموعة E_1

3) لتكن النقطة F مرجح الجملة $\{(D;1),(B;3)\}$

ومنه : $3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MF}$ ونعلم أن :

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG_1}$.

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ :

$4\overrightarrow{MG_1}=4\overrightarrow{MF}$ ومنه $\overrightarrow{MG_1}=\overrightarrow{MF}$ ، إذن المجموعة E_1 هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1F]$.

- تعيين المجموعة E_2

$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يكافئ $4\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

ومنه $\overrightarrow{MG_1}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ، إذن المجموعة E_2 هي الكرة التي قطرها $[G_1C]$.

II. 1- أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;0)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-2;1)$ نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا إذن النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مثلث . لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;0)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-2;1)$

و $\overrightarrow{AC}(-1;-2;1)$ ومنه $BC=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$ ومنه المثلث ABC هو متساوي الساقين .

ب) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)(1)+(-2)(-2)+1\cdot1=4$

ونعلم أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=AC\cdot BC\cdot\cos\widehat{ACB}$ ومنه

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos\widehat{ACB}=4$ ومنه :

$\cos\widehat{ACB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ومنه $\widehat{ACB}=48,2°$

$$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=6+8+6=20$$

$$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2=6-6=0$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=$$

$$=6-8+6=4$$

2) تعيين المجموعة (Γ) . لدينا $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-2)^2+0+0}=2$

و $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|4\overrightarrow{MG_1}\right\|=4MG_1$.

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ يعني $4MG_1=2\times2=4$

ومنه $MG_1=1$. إذن المجموعة (Γ) هي الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها 1 .

حل التمرين6

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3)

لنكتب x و y بدلالة z (z وسيط) ، لدينا : $\begin{cases}x-y-2z=0\\2x+3y+5=5\end{cases}$

ومنه $\begin{cases} x-y=2z & (1)\\ 2x+3y=0 & (2)\end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases}-2x+2y=-4z\\ 2x+3y=0\end{cases}$

بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $5y=-4z$ ومنه $y=-\frac{4}{5}z$

وبالتعويض في المعادلة $x-y=2z$ نجد : $x=\frac{6}{5}z$ ، إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3) هو معرف بـ : $\begin{cases} x=\frac{6}{5}\lambda\\ y=-\frac{4}{5}\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$

2) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان

(D_1) موجه بالشعاع $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و (D_2) موجه بالشعاع $\vec{u_2}(-4;-2;2)$. نلاحظ أن $\vec{u_2}=-2\vec{u_1}$ إذن (D_1) يوازي (D_2)

النقطة $A(1;-2;1)$ تنتمي إلى (D_1) $(t=0)$ وتنتمي إلى (D_2) $(t'=1)$ ، إذن (D_1) و (D_2) هما مستقيمان متوازيان ولهما النقطة A مشتركة فهما متطابقان .

3) إثبات أن المستقيمان (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي

(D_1) موجه بالشعاع $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و (D_3) موجه بالشعاع $\vec{u_3}\left(\frac{6}{5};\frac{-4}{5};1\right)$. الشعاعان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_3}$ غير مرتبطان خطيا

وبالتالي (D_1) و (D_3) يكونا إما متقاطعان أوليس من نفس المستوي . لندرس تقاطع المستقيمين. $(D_3)\cap(D_1)$ معناه:

$$\begin{cases} 1+2t=\frac{6}{5}\lambda\\ -2+t=-\frac{4}{5}\lambda\\ 1-t=\lambda\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad (*)\begin{cases} 2t-\frac{6}{5}\lambda=-1 & (1)\\ t+\frac{4}{5}\lambda=2 & (2)\\ -t-\lambda=-1 & (3)\end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) : $\begin{cases} t+\frac{4}{5}\lambda=2\\ -t-\lambda=-1\end{cases}$

تقبل الحل : $t=6$ و $\lambda=-5$ وهذا الحل لا يحقق المعادلة (1)، إذن الجملة $(*)$ ليست لها حل وبالتالي المستقيمان (D_1) و(D_3) غير متقاطعان . (D_1) و (D_3) غير متوازيان وغير متقاطعان فهما لا ينتميان إلى نفس المستوي .

4- لنعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) موجه بالشعاع $\vec{u}(3;1;1)$ ويمر بالنقطة $A(5;-1;4)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$

ومنه : $x-5=3\alpha$ و $y+1=\alpha$ و $z-4=\alpha$ ومنه :

($x=5+3\alpha$ و $y=-1+\alpha$ و $z=4+\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$)

وهذه المعادلات الثلاثة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

إثبات أن المستقيم (D_1) يقطع (Δ)

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u_1}(2;1;-1)$ و $\vec{u}(3;1;1)$ للمستقيمين (D_1) و (Δ) غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$ ، إذن (D_1) و (Δ) هما إما متقاطعان وإما ليس من نفس المستوي .

لندرس تقاطع (D_1) و (Δ) . $(D_1)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} 1+2t=5+3\alpha \\ -2+t=-1+\alpha \\ 1-t=4+\alpha \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad (*)\begin{cases} 2t-3\alpha=4 & (1) \\ t-\alpha=1 & (2) \\ -t-\alpha=3 & (3) \end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل كحل $\alpha=-2$ و $t=-1$ وهذا الحل يحقق المعادلة (1) . إذن الجملة * تقبل حل وحيد $\alpha=-2$ و $t=-1$ وهذا يعني أن المستقيمان (D_1) و (Δ) متقاطعان في نقطة وحيدة . لتعيين إحداثيات نقطة تقاطع (D_1) و (Δ) نعوض $\alpha=-2$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد : $x=-1$, $y=-3$, $z=2$

إذن $(D_1)\cap(\Delta)=\{I\}$ حيث : $I(-1;-3;2)$

حل التمرين7

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;2;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-1;-4)$. الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{2}{-1}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه النقاط

C,B,A ليست على استقامة واحدة

2) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3(-2)+2\cdot2+1\cdot2=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3(2)+2\cdot(-1)+1\cdot(-4)=0$.

ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ ، فالشعاع $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا ومن نفس المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

3) $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (ABC) يعني : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ومنه $3(x+1)+2(y-0)+(z-2)=0$ ومنه $3x+2y+z+1=0$ وهي معادلة المستوي (ABC) .

4) بما ان المستوي (Q) يوازي المستوي (ABC) فيكون $\vec{n}(3;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) .

$D(2;3;-1)$ نقطة من المستوي (Q) يعني أن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{DM}$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0$ ومنه $3(x-2)+2(y-3)+(z+1)=0$ ومنه $3x+2y+z-11=0$ وهي معادلة المستوي (Q) .

حل التمرين8

1) المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) :

$M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (D) يعني $\overrightarrow{CM}$ يوازي $\vec{u}$

ومنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{CM}=\lambda\vec{u}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-2=\lambda \\ y+1=2\lambda \\ z-1=-\lambda \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$

2) المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) : لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1,9)$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AB). $M(x;y;z)\in(AB)$ يعني يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-1=t \\ y+1=t \\ z+4=9t \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=-4+9t \end{cases}$$ مع $t\in\mathbb{R}$

3) يكون المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) ذو المعادلة : $5x+4y-z-5=0$ إذا كانت نقاط المستقيم (AB) هي ضمن المستوي (P). بتعويض z,y,x بدلالة الوسيط t في معادلة المستوي (P) نجد :

$5(1+t)+4(-1+t)-(-4+9t)-5=0$ ومنه $0=0$.

إذن إحداثيات جميع نقاط المستقيم (AB) تحقق معادلة (P) وهذا يعني أن المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) .

4) $(D)\cap(P)$ يعني :

$$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \\ 5x+4y-z-5=0 \end{cases}$$

ومنه :

$$(*)\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \\ 5(2+\lambda)+4(-1+2\lambda)-(1-\lambda)-5=0 \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة للجملة $(*)$ نستنتج أن $\lambda=0$ وبتعويض λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد :

$z=1, y=-1, x=2$. إذن المستقيم (D) يقطع المستوي (P) في النقطة $I(2;-1;1)$.

حل التمرين9

1) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو المستوي العمودي على (AB) في النقطة I منتصف $[AB]$.

إذن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعتبر شعاع ناظمي لهذا المستوي .

لدينا $\overrightarrow{AB}(4;-4;2)$ و $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أي : $I(1;0;2)$. $M(x;y;z)$ نقطة من هذا المستوي المحوري يعني : $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ومنه :

$4(x-1)-4(y-0)+2(z-2)=0$ ومنه

$4x-4y+2z-8=0$ أو $2x-2y+z-4=0$

وهي معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2) يكون (P_m) ذو المعادلة $(m+1)x+my-2z+m-1=0$

يوازي المستوي (Q) ذو المعادلة $2x+y-2z+3=0$ إذا تحقق ما يلي : $\frac{m+1}{2}=\frac{m}{1}=\frac{2}{2}$. نلاحظ أن إذا كان $m=1$ ، فالمساواة السابقة محققة . إذن إذا كان $m=1$ فالمستوي (P_m) يوازي المستوي (Q) . من أجل $m=1$ تكون معادلة المستوي (P_1) هي : $2x+y-2z=0$. بما أن $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{3}$ فالمستويين (P_m) و (Q) لا يمكن أن يكونا متطابقين .

ب) المستوي (P_m) يعامد المستوي (R) ذو المعادلة $3x+2y-z+1=0$ إذا كان الشعاعين الناظمين $\vec{n}(m+1;m;-2)$ و $\vec{n'}(3;2;-1)$ متعامدين ومنه :

$3(m+1)+2m+(-1)(-2)=0$ ومنه $m=-1$.

حل التمرين10

1) – أ المستقيم (Δ) هومعرف بجملة معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P) و (R) :

$$\begin{cases}x+y-z=0\\-x+y+2z+1=0\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}x+y=z & (1)\\-x+y=-2z-1 & (2)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $2y=-z-1$ ومنه $y=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}$ وبالتعويض في (1) نجد :

$x=\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$. ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو : ($x=\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}$ و $z=\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$) .

ب) من التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نستنتج $\vec{u}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) .

2) المعادلة الديكارتية للمستوي (π) : بما أن المستوي (π) يعامد كل من المستويين (P) و (R) فإن $\vec{n}$ شعاع ناظمي له يعامد كل من الشعاعين الناظمين للمستويين (P) و (R) .

لدينا : $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{n_P}(1;1;-1)$ و $\vec{n_R}(-1;1;2)$.

$\vec{n}\perp\vec{n_P}$ و $\vec{n}\perp\vec{n_R}$ يعني : $\vec{n}\cdot\vec{n_P}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{n_R}=0$ ومنه :

$$\begin{cases}a+b-c=0\\-a+b+2c=0\end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين

$$\begin{cases}a+b-c=0\\2b+c=0\end{cases}$$

بوضع $b=1$ فإن $c=-2$ و $a=-3$.

إذن $\vec{n}(-3;1;-2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (π) .

$M(x;y;z)\in(\pi)$ يعني $\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ومنه

$-3(x-1)+1(y-0)+(-2)(z-0)=0$ ومنه :

$-3x+y-2z+3=0$ وهي معادلة المستوي (π) .

3) $M(x;y;z)\in(\pi)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$ و $-3x+y-2z+3=0$.

بتعويض x, y, z بدلالة λ في المعادلة $-3x+y-2z+3=0$

نجد : $-3\left(\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\right)-2\lambda+3=0$

من هذه المعادلة نستنتج أن : $\lambda=\frac{1}{7}$ وبالتعويض قيمة λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد :

$x=\frac{5}{7}$, $y=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{1}{7}$.

إذن (Δ) يقطع المستوي (π) في النقطة $I\left(\frac{5}{7};-\frac{4}{7};\frac{1}{7}\right)$.

حل التمرين 11

1) الكرة التي مركزها ϖ وتشمل النقطة A يكون نصف قطرها ϖA

$$\varpi A = \sqrt{(x_A-x_\varpi)^2+(y_A-y_\varpi)^2+(z_A-z_\varpi)^2} =$$

$$=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$$

نعلم أن معادلة الكرة (S) التي مركزها ϖ ونصف قطرها R هي : $(x-x_\varpi)^2+(y-y_\varpi)^2+(z-z_\varpi)^2=R^2$ ، إذن معادلة الكرة (S) هي : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=21$ ومنه :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-15=0$.

2) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة A يعني $\overrightarrow{\varpi A}\perp(P)$ ، إذن $\overrightarrow{\varpi A}(1;-2;4)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وتكون معادلة المستوي (P) هي من الشكل : $x-2y+4z+k=0$ وبما أن المستوي (P) يشمل $A(2;0;3)$ فإن $2-2\times0+4\times3+k=0$ ومنه $k+14=0$ ومنه $k=-14$.

وتكون معادلة المستوي (P) هي : $x-2y+4z-14=0$.

3) $x^2+y^2+z^2-25=0$ ومنه $x^2+y^2+z^2=25=5^2$ وهي تمثل معادلة الكرة (S') التي مركزها $O(0;0;0)$ ونصف قطرها 5 .

المسافة بين النقطة O والمستوي (π) هي :

$$d(O;(P)) = \frac{|0\times1+2\times0+2\times0+15|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{15}{3}=5 .$$

بما ان المسافة بين مركز الكرة (S') والمستوي (π) تساوي نصف قطر الكرة (S') فالمستوي (π) يمس الكرة (S') في النقطة H .

النقطة H نقطة تقاطع (S') والمستوي (π) هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (π) أي نقطة تقاطع المستقيم (OH) و (π) . بما أن المستقيم (OH) عمودي على (π) فيكون $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (π) هو شعاع التوجيه له ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH) الذي يمر بالنقطة O

وشعاعه التوجيه $\vec{n}(1;2;2)$ هو : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

$(OH)\cap(\pi)=\{H\}$ يعني :

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \\ x+2y+2z+15=0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad (*)\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2\lambda \\ \lambda+4\lambda+4\lambda+15=0 \end{cases}$$

من الجملة $(*)$ نستنتج $\lambda=-\frac{5}{3}$ وبتعويض λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي لـ (OH) نجد : $x=-5/3, y=-10/3, z=-10/3$

ومنه $H\left(-5/3;-10/3;-10/3\right)$.

حل التمرين12

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$. $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (AB) معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=-2+2\lambda \\ z=\lambda-1 \end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$. وهو التمثيل الوسيطي لـ (AB)

2) النقاط A,B,ϖ ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\varpi}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهي تشكل مستوي

$(AB\varpi)$. الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(AB\varpi)$ هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\varpi}$ أي $\vec{n}(a;b;c)\perp\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$ و $\vec{n}(a;b;c)\perp\overrightarrow{B\varpi}(1;1;0)$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B\varpi}=0$

ومنه $\begin{cases} 2a-2b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ بأخذ $a=1$ فإن $b=-1$ و $c=-4$

ومنه $\vec{n}(1;-1;-4)$ وتكون معادلة المستوي $(AB\varpi)$ من الشكل : $x-y-4z+k=0$ وبما أن المستوي يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1-0-4\times0+k=0$ ومنه $k=-1$.

إذن معادلة المستوي $(AB\varpi)$ هي : $x-y-4z-1=0$.

3) – أ لدينا معادلة (S) : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

ومنه $(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+z^2-1=0$ و منه :

$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ وهي تمثل معادلة كرة مركزها النقطة $\varpi(2;1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ب) بما أن ϖ مركز الكرة ينتمي إلى المستوي $(AB\varpi)$ فإن الكرة (S) والمستوي $(AB\varpi)$ يتقاطعان حسب الدائرة الكبيرة في الكرة أي الدائرة التي مركزها ϖ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

جـ) $(S)\cap(AB)$ يعني :

$$(*)\begin{cases} x=2\lambda-1 & (1)\\ y=-2\lambda+2 & (2)\\ z=\lambda-1 & (3)\\ x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 & (4)\end{cases}$$

بتعويض $x=2\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و $z=\lambda-1$ في المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد : $9\lambda^2-18\lambda+5=0$ ومنه :

$\lambda_1=\frac{5}{3}$ و $\lambda_2=\frac{1}{3}$.إذن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين $E\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ و $F\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$

(إحداثيات النقطتين E و F يتم حسابهما بتعويض λ بالقيمتين λ_1 و λ_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)) .

حل التمرين13

1) بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (P) فيكون شعاعه التوجيه هو $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي المستوي (P).

إذن المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{n}(1;-2;3)$ ويمر بالنقطة $A(-3;5;1)$. $M(x;y,z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ يوازي $\vec{n}$

ومنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\vec{n}$ ومنه :

$$\begin{cases} x+3=\lambda\\ y-5=-2\lambda\\ z-1=3\lambda\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ z=1+3\lambda\end{cases} \text{ مع } \lambda\in\mathbb{R}$$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

2) $(D)\cap(\Delta)$ يعني :

$$\begin{cases} -3+\lambda=t-1\\ 5-2\lambda=-2t+1\\ 1+3\lambda=2t+5\end{cases} \text{ ومنه } (*)\begin{cases} \lambda-t=2 & (1)\\ -2\lambda+2t=-4 & (2)\\ 3\lambda-2t=4 & (3)\end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل كحل $\lambda=0$ و $t=-2$ ونلاحظ أن هذا الحل يحقق أيضا المعادلة (1) ، إذن فهو حل للجملة $(*)$. بما أن الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد فالمستقيمين (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة . لتعيين إحداثيات نقطة تقاطع نعوض $\lambda=0$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي لـ (D) نجد $x=-3$, $y=5$, $z=1$.

3) $(D)\cap P(O;\vec{i};\vec{j})$ يعني :

$$\begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ z=1+3\lambda\\ z=0\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-3+\lambda\\ y=5-2\lambda\\ \lambda=-\frac{1}{3}\\ z=0\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x=-\frac{10}{3}\\ y=\frac{17}{3}\\ z=0\end{cases}$$

المستقيم (D) يقطع المستوي $P(o;\vec{i};\vec{j})$ في $I\left(-\frac{10}{3};\frac{17}{3};0\right)$.

حل التمرين14

1) المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(0;-1;-2)$

والمستقيم (D') هوموجه بالشعاع $\vec{u'}(-5;-2;2)$. نلاحظ أن

الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{-2}{2} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{0}{-5}$ إذن

(D) و (D') هما إما متقاطعان وإما لا ينتميان إلى نفس المستوي .

$(D)\cap(D')$ يعني : $\begin{cases} -1=4-5t' \\ 1-t=3-2t' \\ 1-2t=-1+2t' \end{cases}$ ومنه $t'=1$ و $t=0$.

بما أن الجملة تقبل حل وحيد فالمستقيمان (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة . بتعويض $t=0$ في المعادلات للتمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $z=1$, $y=1$, $x=-1$.

إذن $(D)\cap(D')=\{I\}$ حيث : $I(-1;1;1)$.

2) لدينا $\vec{u}(0;-1;-2)$ و $\vec{u'}(-5;-2;2)$ شعاعي التوجيه للمستقيمين (D) و (D') . $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (D') يعامد كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$

ومنه $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{u'}=0$. ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ ومنه :

$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u}=-b-2c=0 \\ \vec{n}\cdot\vec{u'}=-5a-2b+2c=0 \end{cases}$ بأخذ $c=5$ فإن :

$b=-10$ و $a=6$

ومنه $\vec{n}(6;-10;5)$. المستوي (P) يشمل النقطة $I(-1;1;1)$ تقاطع (D) و (D') و $\vec{n}(6;-10;5)$ شعاع ناظمي له .

$M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (P) يعني $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=0$ ومنه

$6(x+1)+(-10)(y-1)+5(z-1)=0$ ومنه

$6x-10y+5z+11=0$ وهي معادلة المستوي (P).

3) $\vec{u'}(-5;-2;2)$ شعاع التوجيه للمستقيم (D') و $\vec{n}(2;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).

$\vec{n}\cdot\vec{u'}=2(-5)+(-2)(-2)+3\times 2=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{u'}$ وهذا يعني أن المستقيم (D') يوازي المستوي (Q) .

حل التمرين15

1) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2x-y=-3z \\ x-y=-2z+1 \end{cases}$ ومنه

$(*)\begin{cases} 2x-y=-3z \\ -x+y=2z-1 \end{cases}$ بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد

$x=-z-1$ وبالتعويض في المعادلة $x-y=-2z+1$ نجد $y=z-2$. بوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم (D') وهو معرف بـ : $\lambda\in\mathbb{R}$, $(D'):\begin{cases} x=-\lambda-1 \\ y=\lambda-2 \\ z=\lambda \end{cases}$.

$\vec{u}(-1;1;1)$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (D) وهو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (D') وهذا يعني أن المستقيمين (D) و (D') هما متوازيان . من أجل $t=0$ لدينا النقطة $B(3;2;0)$ هي نقطة من المستقيم (D) وهذه النقطة لا تنتمي إلى المستقيم (D') لأن لا توجد قيمة لـ λ تحقق : $3=1-\lambda-$ و $2=2-\lambda$ و $0=\lambda$ ومنه المستقيمان (D) و (D') هما متوازيان تماما .

2) H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) الموجه بالشعاع $\vec{u}$ يعني أن $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ و $H\in(D)$ ومنه $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

لدينا $\overrightarrow{AH}(x_H-1;y_H-2;z_H+1)$ و $\vec{u}(-1;1;1)$ ومنه

$$(*)\begin{cases}-(x_H-1)+(y_H-2)+(z_H+1)=0 \quad (1)\\ x_H=-t+3\\ y_H=t+2\\ z_H=t\end{cases}$$

وبتعويض x_H, y_H, z_H بدلالة t في المعادلة (1) للجملة $(*)$ نجد $-(-t+2)+(t)+(t+1)=0$ ومنه $3t-1=0$ ومنه $t=\frac{1}{3}$ وبتعويض قيمة t في كل من x_H, y_H, z_H نجد :

$z_H=\frac{1}{3}$, $y_H=\frac{7}{3}$, $x_H=\frac{8}{3}$ إذن $H\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي AH

$$AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

حل التمرين16

1) $(P)\cap(Ox)$ يعني : $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ y=z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ y=z=0\end{cases}$ ومنه (P) يقطع (Ox) في النقطة $\left(\frac{5}{2};0;0\right)$

$(P)\cap(Oy)$ يعني $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ x=z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}y=5\\ x=z=0\end{cases}$

المستوي (P) يقطع (Oy) في النقطة $(0;5;0)$

$(P)\cap(Oz)$ يعني $\begin{cases}2x+y-3z-5=0\\ x=y=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z=-\frac{5}{3}\\ x=y=0\end{cases}$

المستوي (P) يقطع (Oz) في النقطة $\left(0;0;-\frac{5}{3}\right)$

2- أ) $\vec{u}(1;3;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) و $\vec{v}(-2;5;9)$ شعاع ناظمي للمستوي (R) . الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وهذا يعني أن المستويين (Q) و (R) متقاطعان وفق المستقيم (D) المعرف بجملة المعادلتين الديكارتيتين :

$$\begin{cases} x+3y+z-10=0 \\ -2x+5y+9z-13=0 \end{cases}$$

لتعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) ، نأخذ z كوسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة ذات المجهولين x و y :

$\begin{cases} x+3y=-z+10 \\ -2x+5y=-9z+13 \end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases} 2x+6y=-2z+20 \\ -2x+5y=-9z+13 \end{cases}$

بجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $11y=-11z+33$ ومنه :

$y=-z+3$ وبالتعويض في المعادلة $x+3y=-z+10$ نجد :

$x=2z+1$ ويكون التمثيل الوسيطي لـ (D) معرف بالجملة :

$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda \end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$. من التمثيل الوسيطي لـ (D)

نستنتج أن شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{u}(2;-1;1)$.

بوضع $\lambda=0$ نعين النقطة $E(1;3;0)$ من المستقيم (D) .

ب) لدينا $(P): 2x+y-3z-5=0$ و $(D)\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda \end{cases}$

بتعويض x,y,z بدلالة λ في معادلة المستوي (P) نجد :

$2(2\lambda+1)+(-\lambda+3)-3\lambda-5=0$ وبعد التبسيط نجد : $0=0$

وهذا يعني أن إحداثيات جميع نقاط المستقيم (D) تحقق معادلة

المستوي (P) ، إذن (D) هو ضمن المستوي (P) .

جـ) التفسير الهندسي لحل الجملة.

$$\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 & (1) \\ -2x+5y+9z-13=0 & (2) \\ x+3y+z-10=0 & (3) \end{cases}$$

الحل لهذه الجملة يمثل تقاطع المستويات الثلاثة : $(P),(R),(Q)$

حسب السؤال 2- أ) تقاطع المستويين (R) و (Q) هو المستقيم (D) وحسب السؤال 2- ب) المستقيم (D) هو محتوى في (P) ، إذن المستقيم (D) هو مشترك بين المستويات : $(P),(R),(Q)$. التفسير الهندسي للحل للجملة المذكورة هو أن المستويات $(P),(R),(Q)$ تتقاطع وفق المستقيم (D) .

حل التمرين17

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$ نلاحظ أن $\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-3}$ ، إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقاط C,B,A ليست استقامية . لدينا $(P): y+2z-2=0$

بما أن : $2\times0+1\times0+1\times2-2=0$ فإن $A\in(P)$

بما أن : $3\times0+2\times1+0\times2-2=0$ فإن $B\in(P)$

بما أن : $-1\times0+(-2)\times1+2\times2-2=0$ فإن $C\in(P)$ ،

إذن معادلة المستوي (P) هي : $y+2z-2=0$.

2) - أ) $x_G = \dfrac{-2x_A+x_B+2x_C}{-2+1+2} = -3$ ،

$y_G = \dfrac{-2y_A+y_B+2y_C}{-2+1+2} = -2$ ، $z_G = 2$.

إذن $G(-3;-2;2)$. ب) نعلم أن :

$$-2MA^2+MB^2+2MC^2 =$$
$$=(-2+1+2)MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2 =$$
$$=MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2$$

$$GA^2=(x_A-x_G)^2+(y_A-y_G)^2+(z_A-z_G)^2=30$$
$$GB^2=(x_B-x_G)^2+(y_B-y_G)^2+(z_B-z_G)^2=56$$
$$GC^2=(x_C-x_G)^2+(y_C-y_G)^2+(z_C-z_G)^2=4$$
$$MG^2-2GA^2+GB^2+2GC^2=MG^2-60+56+8=13$$

ومنه : $MG^2=9=3^2$ ، إذن مجموعة النقط M من الفضاء المطلوبة هي الكرة (S) التي مركزها G ونصف قطرها 3 .

جـ) $I(0;-2;2)$ تنتمي إلى الكرة (S) إذا كان $GI=R=3$.

$$GI=\sqrt{(x_I-x_G)^2+(y_I-y_G)^2+(z_I-z_G)^2}$$

$GI=\sqrt{3^2+0^2+0^2}=3$ ومنه $I\in(S)$

المستوي (R) مماس للكرة (S) التي مركزها G عند النقطة I

يعني أن الشعاع $\vec{GI}(3;0;0)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R) .

$M(x;y;z)\in(R)$ معناه $\vec{IM}\perp\vec{GI}$ ومنه $\vec{IM}\cdot\vec{GI}=0$

ومنه $3(x-0)+0\times(y+2)+0\times(z-2)=0$ ومنه

$3x=0$ ومنه $x=0$ وهي معادلة المستوي (R) .

3) $(R)\cap(ABC)$ يعني :

$\begin{cases} x=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=0 \\ y=-2z-2 \end{cases}$

وهذه الجملة المكونة من معادلتين ديكارتيتين تمثل المستقيم (D) .

إذن المستويين (R) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (D) .

حل التمرين18

1) المستوي (P) هو : (ABC) لأن إحداثيات النقط C,B,A تحقق معادلة المستوي (P) .

2) شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}(2;1;1)$ لأن التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يظهر شعاعه التوجيه .

3) المستقيم (Δ) يقطع (P) لأن $\vec{n}(1;-1;2)$ شعاع ناظمي لمستوي (P) و $\vec{u}(2;1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) غير متعامدان $(\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0)$ وهذا يعني أن المستقيم (Δ) لا يوازي المستوي (P) إذن فهو يقطعه .

4) A تنتمي إلى (P) لأن إحداثيات A تحقق معادلة (P).

5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي : $\frac{\sqrt{6}}{3}$ لأن :

$$d\left(D;(P)\right)=\frac{|-1-2+2-1|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ .$$

6) المستقيم (Δ) يقطع (P) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$

لأن إحداثيات هذه النقطة تحقق معادلة (P) فهي تنتمي إلى (P) ،

ومن أجل $\lambda=\frac{2}{3}$ لدينا $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ نقطة من (Δ) ، إذن النقطة $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ هي نقطة مشتركة بين (Δ) و (P) فهي نقطة تقاطع .

حل التمرين19

1) النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي

$A(1;0;3)\in(ABC)$ لأن : $1+2\times0+2\times3-7=0$.

$B(1;3;0)\in(ABC)$ لأن : $1+2\times3+2\times0-7=0$.

$C(3;1;1)\in(ABC)$ لأن : $3+2\times1+2\times1-7=0$.

إذن معادلة المستوي (ABC) هي : $x+2y+2z-7=0$.

2- أ) $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{v}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q). $\vec{n}\cdot\vec{v}=1\times2+2(-2)+1\times2=0$

ومنه : $\vec{n}\perp\vec{v}$ وهذا يعني أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدين.

ب) المستقيم (D) الذي هو تقاطع المستويين (Q) و (ABC) هو

معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين : $\begin{cases}x+2y+2z-7=0\\2x-2y+z-5=0\end{cases}$

لتعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) ، نعتبر z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة ذات المجهولين x و y :

$\begin{cases}x+2y=-2z+7 & (1)\\2x-2y=-z+5 & (2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد :

$3x=-3z+12$ ومنه $x=-z+4$ وبتعويض في (1) نجد :

$y=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}$. ومنه : $\begin{cases}x=-\lambda+4\\y=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2}\\z=\lambda\end{cases}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

ج) $d\left(D;(Q)\right)=\frac{|2\times2-2(-1)+1-5|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$

حل التمرين20

توجد عدة طرق لحل الجملة الآتية : $\begin{cases}2x+y-z=5 & (1)\\-3x+2y-1=0 & (2)\\x-3y+2z=-4 & (3)\end{cases}$

الطريقة الأولى : من إحدى المعادلات للجملة نعبر عن واحد من المجاهيل بدلالة المجهولين الآخرين ثم نعوض في المعادلتين الأخريين وبالتالي نحصل على جملة معادلتين بمجهولين نستطيع حلها ببساطة .

في الجملة المعطاة : من المعادلة (1) نعبر عن المجهول z بدلالة المجهولين x و y . لدينا : $z = 2x + y - 5$ نعوض في (3) نحصل

على الجملة : $\begin{cases} -3x + 2y = 1 & (4) \\ 8x - y = 6 & (5) \end{cases}$ ومنه بضرب (5) في $(+2)$

نحصل على : $\begin{cases} -3x + 2y = 1 & (4) \\ 16x - 2y = 12 & (6) \end{cases}$ بجمع المعادلتين (4) و (6)

نجد : $13x = 13$ ومنه $x = 1$ وبتعويض في (5) نجد : $y = 2$.

ولدينا : $z = 2x + y - 5 = 2 + 2 - 5 = -1$.

الطريقة الثانية : (طريقة Gauss) . $\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -3x + 2y - 1 = 0 & L_2 \\ 4x - 3y + 2z = -4 & L_3 \end{cases}$

بضرب L_1 في (-2) وبجمع مع L_3 $(L_2 \leftarrow -2L_1 + L_3)$ نجد : $-5y + 4z = -14$ وبضرب L_1 في $(+3)$ و L_2 في $(+2)$ وبجمع المعادلتين $(L_3 \leftarrow 3L_1 + 2L_2)$ نجد : $7y - 3z = 17$ أي نحصل

على الجملة الآتية : $\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -5y + 4z = -14 & L_2 \\ 7y - 3z = 17 & L_3 \end{cases}$

بضرب L_2 في $(+7)$ و L_3 في $(+5)$ وبجمع المعادلتين $(L_3 \leftarrow 7L_2 + 5L_3)$ نجد : $13z = -13$ ومنه :

$(*)\begin{cases} 2x + y - z = 5 & L_1 \\ -5y + 4z = -14 & L_2 \\ 13z = -13 & L_3 \end{cases}$ من L_3 نستنتج أن $z = -1$

وبتعويض $z = -1$ في L_2 للجملة $(*)$ نجد $y = 2$ وبتعويض قيمتي z و y في L_1 نجد : $x = 1$ ، إذن الحل للجملة المعطاة هو $x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = -1$.

التفسير الهندسي : معادلات الجملة المعطاة هي تمثل معادلات مستويات والتفسير الهندسي للحل لهذه الجملة هو أن المستويات $(P) : 2x + y - z - 5 = 0$ ، $(Q) : -3x + 2y - 1 = 0$

$(R) : 4x - 3y + 2z + 4 = 0$ تتقاطع في النقطة $I(1;2;-1)$.

حل التمرين21

1) $(P) \cap (Q)$ يعني : $\begin{cases} -2x + y - 5z + 5 = 0 \\ 4x + y + 4z - 7 = 0 \end{cases}$

وهذه الجملة تمثل المستقيم (Δ) . لكتابة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة الآتية :

$\begin{cases} -2x + y = 5z - 5 \\ 4x + y = -4z + 7 \end{cases}$ ومنه $(*)\begin{cases} -4x + 2y = 10z - 10 \\ 4x + y = -4z + 7 \end{cases}$

وبجمع المعادلتين للجملة $(*)$ نجد : $3y = 6z - 3$ ومنه

$y=2z-1$ وبتعويض في المعادلة $-2x+y=5z-5$ نجد :

$x=-\frac{3}{2}z+2$. بوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي

لـ (Δ) : $(\Delta):\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\lambda+2\\ y=2\lambda-1\\ z=\lambda\end{cases}\quad ,\ \lambda\in\mathbb{R}$

2) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ) يعني

$(BH)\perp(\Delta)$. لدينا $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};2;1\right)$ شعاع التوجيه لـ (Δ) و

$\overrightarrow{BH}(x_H-1;y_H;z_H+1)$. لدينا $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ و $H\in(\Delta)$

ومنه $(*)$ $\quad -\frac{3}{2}(x_H-1)+2y_H+z_H+1=0$

و $\begin{cases}x_H=-\frac{3}{2}\lambda+2\\ y_H=2\lambda-1\\ z_H=\lambda\end{cases}$

بتعويض x_H, y_H, z_H بدلالة λ في المعادلة $(*)$ نجد :

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\lambda+1\right)+2(2\lambda-1)+\lambda+1=0$$

ومنه $\frac{29}{4}\lambda-\frac{5}{2}=0$ و منه : $\lambda=\frac{10}{29}$. بتعويض λ في

x_H, y_H, z_H نجد : $z_H=\frac{10}{29}$, $y_H=-\frac{9}{29}$, $x_H=\frac{43}{29}$.

المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) هي BH

$$BH=\sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H-y_B)^2+(z_H-z_B)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{14}{29}\right)^2+\left(-\frac{9}{29}\right)^2+\left(\frac{39}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{1781}{841}}=\sqrt{\frac{62}{29}}$$

3) المعادلة الديكارتية للمستوي (R) الذي يكون $\vec{u}(-3;4;2)$

شعاع ناظمي له هي من الشكل : $-3x+4y+2z+k=0$

وبما أن (R) يشمل النقطة $A(2;-1;0)$ فإن :

$-3\times2+4\times(-1)+2\times0+k=0$ ومنه : $k=10$.

إذن معادلة المستوي (R) هي : $-3x+4y+2z+10=0$

4) لدينا التمثيل الوسيطي لـ (Δ) : $(\Delta):\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\lambda+2\\ y=2\lambda-1\\ z=\lambda\end{cases}$

نلاحظ أن من أجل $\lambda=0$ لدينا : $z=0$, $y=-1$, $x=2$ وهي

النقطة $A(2;-1;0)$ ، إذن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

حسب السؤال الأول المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم

(Δ) . النقطة $A(2;-1;0)$ تنتمي إلى (Δ) وإلى المستوي (R)

وهذا يعني أن النقطة A هي مشتركة بين المستويات الثلاثة : (P) , (Q) , (R) ومنه : $(P)\cap(Q)\cap(R)=\{A\}$.

حل التمرين22

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;0;2)$, $\overrightarrow{AC}(-1;-2;1)$. نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن : $\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{-2}$ ومنه النقط C,B,A ليست على استقامة واحدة .

2) لنرمز بـ $\vec{n}(a;b;c)$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يعني : $a+2c=0$ و $-a-2b+c=0$. نلاحظ أنه يوجد عدد غير منته من الحلول للجملة المكونة من هاتين المعادلتين :

$$\begin{cases} a+2c=0 & (1) \\ -a-2b+c=0 & (2) \end{cases}$$

بأخذ $c=-2$ وبتعويض في (1) نجد $a=+4$ وبتعويض هاتين القيمتين في (2) نجد $b=-3$ ومنه $\vec{n}(4;-3;-2)$.

المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) الذي $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $4x-3y-2z+k=0$ وبما أن المستوي (ABC) يشمل النقطة $B(2;1;0)$ فإن :

$4\times2-3\times1-2\times0+k=0$ ومنه $k=-5$. إذن معادلة المستوي (ABC) هي : $4x-3y-2z-5=0$.

3) لدينا : $(P)\ :\ -4x+3y+2z-1=0$ و

$(ABC)\ :\ 4x-3y-2z-5=0$. نلاحظ أن :

$\frac{-2}{2}=\frac{-3}{3}=\frac{4}{-4}$ ، إذن المستويين (P) و (ABC) هما متوازيان.

4) لدينا $\vec{u}(2;1;3)$ شعاع التوجيه المستقيم (D) و $\vec{v}(-4;3;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) . $\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-4)+1\times3+3\times2\neq0$.

وهذا يعني أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين ومنه المستقيم (D) لا يوازي المستوي (P)، إذن المستقيم (D) يقطع (P). إحداثيات نقطة تقاطع هي الحل للجملة:

$$\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=\lambda-2 \\ z=3\lambda+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (*)\ \ -4x+3y+2z-1=0$$

بتعويض x,y,z بدلالة λ في المعادلة $(*)$ نجد :

$-4(2\lambda+1)+3(\lambda-2)+2(3\lambda+1)-1=0$ وبعد التبسيط نجد : $\lambda=9$. وبتعويض قيمة λ في معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $x=19$, $y=7$, $z=28$.

إذن $(D)\cap(P)=\{I\}$ حيث : $I(19;7;28)$.

حل التمرين23

1) لدينا : $(D):\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ ومنه

$x-2=2t$ و $y+1=3t$ و $z-2=t$ ومنه :

$$(D):\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+3t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=2+t\end{cases}$$

المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(2;3;1)$. المستقيم (Δ) هو موجه بالشعاع $\vec{v}(3;1;1)$. نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{3}\neq\frac{3}{2}$ ، إذن المستقيمان (D) و (Δ) يكونا إما متقاطعان وإما ليس من نفس المستوي . لندرس تقاطع (D) و (Δ)

$(D)\cap(\Delta)$ معناه :

$$\begin{cases} 2+2t=3\lambda-2 \\ -1+3t=\lambda \\ 2+t=\lambda+1\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad (*)\begin{cases} 2t-3\lambda=-4 & (1) \\ 3t-\lambda=1 & (2) \\ t-\lambda=-1 & (3)\end{cases}$$

الجملة المكونة من المعادلتين (1) و (2) تقبل الحل $t=1$ و $\lambda=2$

القيمتين $t=1$ و $\lambda=2$ تحققان المعادلة (3) ، إذن الجملة $(*)$ تقبل الحل : $t=1$ و $\lambda=2$. بتعويض $t=1$ في معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $x=4$, $y=2$, $z=3$.

إذن (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة $I(4;2;3)$.

2) ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) ،
المسافة AH تمثل بعد النقطة A على المستقيم (D).

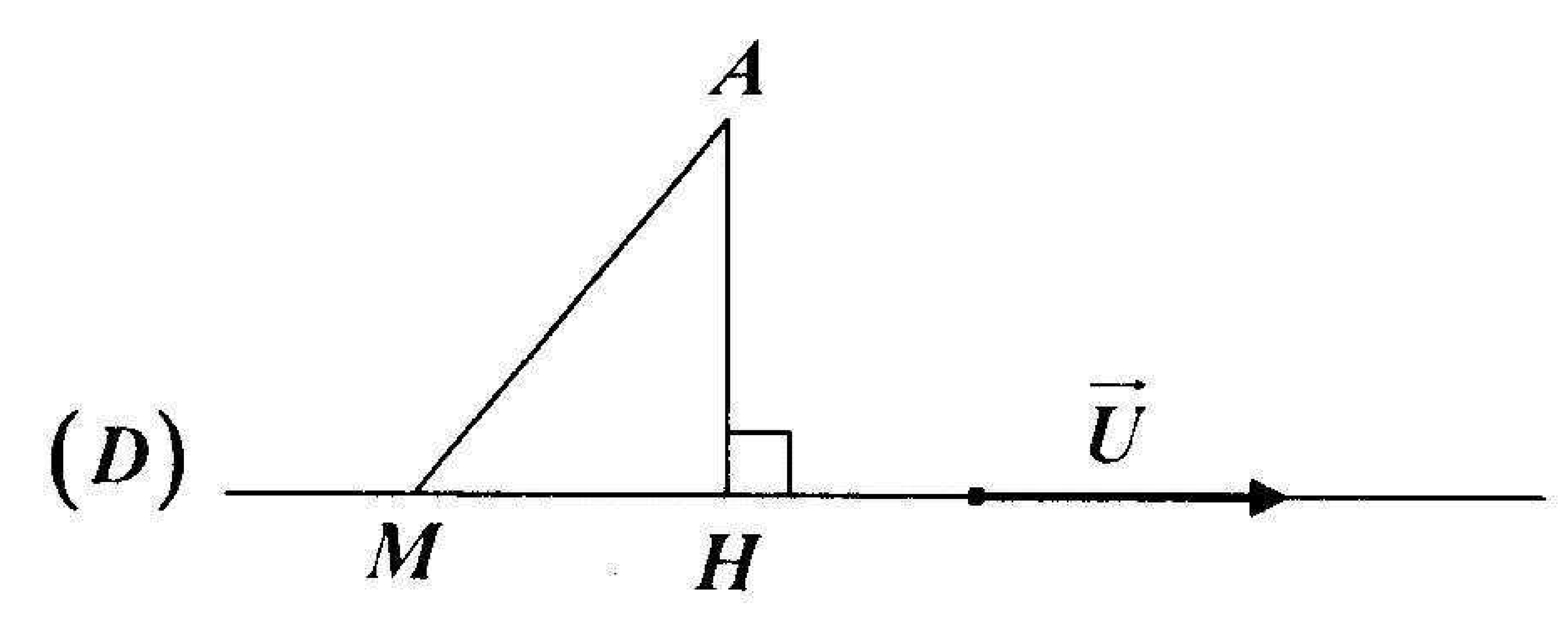
النقطة $M(2;-1;2)$ تنتمي إلى (D) وهي توافق قيمة $t=0$.

لدينا $\vec{u}(2;3;1)$ شعاع التوجيه لـ (D) و $\overrightarrow{AM}(1;0;2)$

لدينا : $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}\right| = \left|2\times1+3\times0+1\times2\right| = 4$.

ونعلم أن : $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}\right| = \left|\vec{u}\cdot\overrightarrow{HM}\right| = \left\|\vec{u}\right\|\cdot HM = \sqrt{14}HM = 4$

ومنه $HM=\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ لأن $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$



المثلث AHM قائم في H وحسب نظرية فيتاغورس فإن : $AH^2=AM^2-HM^2$. نعلم أن :

$AM=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

ومنه : $AH^2=AM^2-HM^2=5-{}^{8}/_{7}={}^{27}/_{7}$.

ومنه $AH=3\sqrt{\frac{3}{7}}$. إذن بعد النقطة A عن (D) هو $3\sqrt{\frac{3}{7}}$

3) $(D)\cap P\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ يعني :
$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \\ z=0 \end{cases}$$

$z=0$ يكافئ $2+t=0$ ومنه $t=-2$ وبتعويض قيمة t في معادلات التمثيل الوسيطي لـ(D) نجد $z=0$, $y=-7$, $x=-2$

إذن (D) يقطع $P\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ في النقطة $I(-2;-7;0)$.

حل التمرين24

1) نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد الحقيقي m تعدم في آن واحد المعاملات الثلاثة $(2;m;m-1)$ ، إذن مهما تكن قيمة m فإن :

$2x+(m-1)y+2mz+m-2=0$ تمثل معادلة مستوي .

2) لدينا : $2x+(m-1)y+2mz+m-2=0$ ومنه :

$(*)$ $(y+2z+1)m+(-y+2x-2)=0$. نلاحظ أنه إذا كان

(e) $\begin{cases} y+2z+1=0 \\ -y+2x-2=0 \end{cases}$ ، فإن المعادلة $(*)$ تكون دائما محققة

مهما تكون قيمة العدد الحقيقي m . ونعلم أن الجملة (e) هي جملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين فهي تمثل مستقيم (D).

إذن من أجل كل $m\in\mathbb{R}$ فإن كل المستويات (P_m) تشمل (D)

المعرف بـ : $\begin{cases} y+2z+1=0 \\ -y+2x-2=0 \end{cases}$ أو

$\begin{cases} x=-z+\frac{1}{2} \\ y=-2z-1 \end{cases}$ بوضع $z=\lambda$ نحصل على التمثيل الوسيطي

لـ(D) ($x=-\lambda+\frac{1}{2}$ و $y=-2\lambda-1$ و $z=\lambda$) حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

بوضع $z=t$ لدينا : $\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

3)يكون المستوي (P_m) الذي $\overrightarrow{n_m}(2;m-1;2m)$ هو شعاع ناظمي له يوازي المستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{u}(-2;-1;1)$ إذا كان $\overrightarrow{n_m}\perp\vec{u}$ أي : $\overrightarrow{n_m}\cdot\vec{u}=0$ ومنه

$(-2)\times2+(-1)(m-1)+2m=0$ ومنه : $m=3$.

بتعويض $m=3$ في معادلة (P_m) نجد معادلة المستوي المطلوب : $2x+2y+6z+1=0$.

حل التمرين25

1) لدينا $\overrightarrow{n_P}(1;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overrightarrow{n_Q}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) و $\vec{u}(2;3;1)$ شعاع التوجيه للمستقيم (D) . $(P)\perp(Q)$ يعني $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}$ ومنه :

$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=a+2b-c=0$. (Q) يشمل (D) يعني:

(Q) يوازي (D) ويكافئ $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}$ ومنه :

إذن لدينا : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_Q}=2a+3b+c=0$

$$\begin{cases} a+2b-c=0 & (1)\\ 2a+3b+c=0 & (2)\end{cases}$$

هذه الجملة تقبل عدد غير منتهي من الحلول . بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد : $3a+5b=0\ (*)$. نأخذ $a=5$ في المعادلة $(*)$ ثم نستنتج قيمة b التي تساوي (-3) وبتعويض a و b في المعادلة (2) نجد : $c=-1$ ومنه $\overrightarrow{n_Q}(5;-3;-1)$.

بأخذ $\lambda=1$ وبتعويض في المعادلات التي تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد : $x=3$, $y=2$, $z=1$ وهي تمثل إحداثيات النقطة $A(3;2;1)$ التي تنتمي إلى (D).

لدينا $A\in(D)$ و (Q) يحتوى (D) ومنه المستوي (Q) يشمل A .

إذن معادلة المستوي (Q) هي معادلة مستوي يشمل $A(3;2;1)$ و $\vec{n}(5;-3;-1)$ شعاع ناظمي له . تكون معادلة المستوي (Q) هي من الشكل : $5x-3y-z+k=0$ وبما أن (Q) يشمل $A(3;2;1)$ فإن : $5\times3-3\times2-1+k=0$ ومنه $k=-8$

وتكون معادلة (Q) هي : $5x-3y-z-8=0$

2) بما أن المستوي (R) يوازي المستوي (P) فيكون $\overrightarrow{n_P}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (R)، وتكون معادلة المستوي (R) هي من الشكل : $x+2y-z+k=0$ وبما أن $B(1;0-1)$

تنتمي إلى المستوي (R) فإن : $1+2\times0+1+k=0$ ومنه $k=-2$ وتكون معادلة المستوي (R) هي : $x+2y-z-2=0$

3) المسافة بين النقطة $B(1;0;-1)$ والمستوي (Q) هي :

$$d(B;(Q))=\frac{|5\times1-3\times0+1-8|}{\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{35}}\ .$$

حل التمرين26

1- أ) لدينا $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$, $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$. نلاحظ ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأن : $\frac{0}{6}\neq\frac{-3}{-3}$.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=4(-3)+2\times6+3\times0=0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=4(-3)+2\times0+3\times4=0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$.

الشعاع $\vec{u}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا من نفس المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ب) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي من الشكل :

$4x+2y+3z+k=0$ وبما أن المستوي (ABC) يشمل النقطة $A(3;0;0)$ فإن : $4\times3+2\times0+3\times0+k=0$

$k=-12$ ، وتكون معادلة المستوي (ABC) هي :

$4x+2y+3z-12=0$.

2- أ) المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) يعني أن

شعاع ناظمي المستوي (ABC) هو شعاع توجيهه .

إذن المستقيم (Δ) يشمل النقطة $D(-5;0;1)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(4;2;3)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{DM}=\lambda\vec{u}$.

ومنه : $\begin{cases} x+5=4\lambda \\ y=2\lambda \\ z-1=3\lambda \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-5+4\lambda \\ y=2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$ $;\lambda\in\mathbb{R}$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) النقطة H مسقط النقطة D على المستوي (ABC) هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC).

$(\Delta)\cap(ABC)=\{H\}$ معناه : $\begin{cases} x_H=4\lambda-5 \\ y_H=2\lambda \\ z_H=3\lambda+1 \\ 4x_H+2y_H+3z_H-12=0 \end{cases}$

وبتعويض x_H, y_H, z_H بدلالة λ في المعادلة الأخيرة للجملة نحصل على : $4(4\lambda-5)+2\times2\lambda+3(3\lambda+1)-12=0$

ومنه $29\lambda-29=0$ ومنه $\lambda=1$. بتعويض قيمة λ في معادلات التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $x_H=-1, y_H=2, z_H=4$

ومنه $H(-1;2;4)$.

3- أ) $(ABC)\cap(Ox)$ يعني : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ y=z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 4x-12=0 \\ y=z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=3 \\ y=z=0 \end{cases}$

إذن المستوي (ABC) يقطع (Ox) في النقطة $(3;0;0)$.

$(ABC)\cap(Oy)$ يعني : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ x=z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 2y-12=0 \\ x=z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=6 \\ x=z=0 \end{cases}$

إذن المستوي (ABC) يقطع (Oy) في النقطة $(0;6;0)$.

ب) $(ABC)\cap(xOy)$ معناه : $\begin{cases} 4x+2y+3z-12=0 \\ z=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 4x+2y-12=0 \\ z=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ z=0 \end{cases}$

وهذه الجملة لمعادلتين ديكارتيتين تمثل مستقيم (D) يكون تمثيله الوسيطي باعتبار x وسيط $(x=\lambda)$ كما يلي : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda+6 \\ z=0 \end{cases}$

إذن المستويين (ABC) و (xOy) يتقاطعان وفق المستقيم (D).

حل التمرين 27

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-1;1)$. $M(x;y;z)\in(AB)$ معناه وجود عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$\begin{cases} x-1=\lambda \\ y-2=-\lambda \\ z-3=\lambda \end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D).

2) لدينا : $(D):\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$ و $(P):\ 3x+y-2z+1=0$

بتعويض x, y, z بدلالة λ في معادلة المستوي (P) نحصل على :
$3(\lambda+1)+(-\lambda+2)-2(\lambda+3)+1=0$ وبعد تبسيط هذه المعادلة نجد : $0=0$ ، إذن مهما تكون قيمة λ فتكون معادلة المستوي (P) محققة وهذا يعني أن جميع نقاط المستقيم (D) هي ضمن المستوي (P) أي أن المستقيم (D) محتوى في (P).

3) (Q) مستوي يشمل النقطة $B(2;1;4)$ و $\vec{v}(1;1;2)$ شعاع ناظمي له . $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (Q) يعني :
$\overrightarrow{BM}\perp\vec{v}$ ومنه $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}=0$ ومنه :
$(x-2)+(y-1)+2(z-4)=0$ ومنه
$x+y+2z-11=0$ وهي معادلة المستوي (Q).

4) لدينا $\overrightarrow{n_P}(3;1;-2)$ و $\vec{v}(1;1;2)$. نلاحظ أن :
$3\times1+1\times1+(-2)\times2=0$ يكافئ $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{v}$ ومنه $(P)\perp(Q)$

$(P)\cap(Q)$ يعني : $(*)$ $$(\Delta):\begin{cases} 3x+y-2z+1=0 \\ x+y+2z-11=0 \end{cases}$$

وهذه الجملة تمثل مستقيم (Δ) . لإعطاء التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z في الجملة $(*)$ أي

نحل الجملة : $$\begin{cases} 3x+y=2z-1 & (1) \\ x+y=-2z+11 & (2) \end{cases}$$

ومنه بضرب المعادلة (2) في (-1) وبجمع المعادلتين نحصل على

الجملة : $\begin{cases} 3x+y=2z-1 & (1) \\ -x-y=2z-11 & (3) \end{cases}$ وبجمع (1) و (3) نجد:

$2x=4z-12$ ومنه $x=2z-6$ وبتعويض في (2) نجد :

$y=-4z+17$. بوضع $z=t$ نجد $\begin{cases} x=2t-6 \\ y=-4t+17\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

5) H مسقط النقطة C على المستقيم (Δ) يعني $\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$ حيث
$\overrightarrow{CH}(x_H-1;y_H;z_H-2)$ و $\vec{u}(2;-4;1)$ شعاع التوجيه لـ(Δ)
ومنه : $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=2(x_H-1)-4y_H+(z_H-2)=0$ ومنه :
$2x_H-4y_H+z_H-4=0\ (*)$ وبما أن H ينتمي إلى (Δ) فإن
($x_H=2t-6$ و $y_H=-4t+17$ و $z_H=t$).

بتعويض x_H , y_H , z_H بدلالة t في المعادلة $(*)$ نجد

$2(2t-6)-4(-4t+17)+t-4=0$ ومنه $t=4$.

بتعويض t بقيمتها في معادلات التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :

$x=2$, $y=1$, $z=4$. إذن $H(2;1;4)$.

$$CH=\sqrt{(x_H-x_C)^2+(y_H-y_C)^2+(z_H-z_C)^2}=\sqrt{6}$$

6- أ) المعادلة الديكارتية للكرة (S) هي :

$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=2^2$ ومنه :

$x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.

ب) المسافة بين $C(1;0;2)$ مركز الكرة (S) والمستوي (Q)

هي : $d(C,(Q))=\frac{|1+0+2\times 2-11|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

بما أن $(d>R)$ $\sqrt{6}>2$ ، فالمستوي (Q) لا يقطع الكرة (S) .

حل التمرين28

1) $M(x;y;z)\in(D)$ يعني : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ ومنه :

$$\begin{cases}x-2=-\lambda\\ y-0=-\lambda\\ z-1=\lambda\end{cases} \text{ ومنه } (D):\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=-\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

وهذه الجملة تعبر عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

2) $M(x;y;z)$ نقطة من الكرة (S) التي قطرها $[AB]$

يعني : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا $\overrightarrow{MA}(x-2;y;z-1)$ و $\overrightarrow{MB}(x-1;y+1;z-2)$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x-2)(x-1)+y(y+1)+(z-1)(z-2)=0$$

وبعد التبسيط نجد : $x^2+y^2+z^2-3x+y-3z+4=0$.

3) إحداثيات ϖ مركز الكرة (S) هي :

$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ أي $\varpi\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

المستوي (R) مماس للكرة (S) عند النقطة A يعني :

$\overrightarrow{\varpi A}\perp(R)$ ، إذن $\overrightarrow{\varpi A}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R) .

لدينا $\overrightarrow{\varpi A}\left(1/2;1/2;-1/2\right)$ وتكون معادلة (R) هي من الشكل

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+k=0$ أو $x+y-z+2k=0$

وبما أن $A(2;0;1)\in(R)$ فإن : $2+0-1+2K=0$ ومنه

$2k=-1$ ، إذن معادلة المستوي (R) هي: $x+y-z-1=0$.

حل التمرين29

1) $$\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases}\frac{x+1}{2}=\lambda\\ 2-y=\lambda\\ \frac{z+2}{3}=\lambda\end{cases} \text{ ومنه :}$$

$\frac{x+1}{2}=\frac{2-y}{1}=\frac{z+2}{3}$ ومنه :

$\begin{cases}x+1=2(2-y)\\3(x+1)=2(z+2)\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x+2y-3=0\\3x-2z-1=0\end{cases}$

وهذه الجملة الأخيرة تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

2) $(D)\cap(P)$ يعني : $\begin{cases}x=-1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-2+3\lambda\\3x-2y+z-2=0\ (e)\end{cases}$

ومنه بتعويض x,y,z بدلالة λ في المعادلة الأخيرة (e) للجملة نحصل على : $3(-1+2\lambda)-2(2-\lambda)+(-2+3\lambda)-2=0$

ومنه : $\lambda=1$ وبتعويض قيمة λ في معادلات الجملة نجد : $x=1$, $y=1$, $z=1$. إذن المستقيم (D) يقطع المستوي (P) في النقطة $I(1;1;1)$.

3) لدينا :

$(D):\begin{cases}x=-1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-2+3\lambda\end{cases}$ و $(Q):\ 2x-5y-3z+6=0$

وبتعويض x,y,z بدلالة λ في معادلات المستوي (Q) نجد : $2(-1+2\lambda)-5(2-\lambda)-3(-2+3\lambda)+6=0$ وبعد التبسيط ، المعادلة تكتب $0=0$ وهذا يعني أن جميع نقاط (D) تحقق

معادلة المستوي (Q) ، إذن (D) محتوى في المستوي (Q).

ب) $(P)\cap(Q)=(\Delta)$ يعني : $\begin{cases}3x-2y+z-2=0\\2x-5y-3z+6=0\end{cases}$

نأخذ z وسيط ونعبر عن x و y بدلالة z أي نحل الجملة :

$\begin{cases}3x-2y=-z+2 & (*)\\2x-5y=3z-6 & (\bullet)\end{cases}$ بضرب المعادلة $(*)$ في (-2) والمعادلة $(\bullet)$ في $(+3)$ وبجمع المعادلتين نجد:

$-11y=11z-22$ ومنه : $y=-z+2$ وبالتعويض في المعادلة $(\bullet)$ نجد : $x=-z+2$.إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو معرف بـ : $\begin{cases}x=-\lambda+2\\y=-\lambda+2\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$

4) لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x=(x-2)^2+y^2+z^2-4=0$

ومنه : $(x-2)^2+y^2+z^2=4=2^2$. إذن مركز الكرة (S) هي النقطة $\varpi(2;0;0)$ ونصف قطرها $R=2$.

المسافة بين $\varpi(2;0;0)$ والمستوي (P) تساوي :

$$d(\varpi;(P))=\frac{|3\times2-0+0-2|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}<2 .$$

بما أن $d(\varpi;(P))<2$ فالمستوي (P) يقطع (S) وفق دائرة .

حل التمرين30

1- أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2(-1)+1(-2)+(-1)(-4)=0$$

ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. ب) المثلث ABC هو قائم B .

جـ) مساحة المثلث ABC تساوي $S=\frac{1}{2}AB\times BC$.

ونعلم أن : $AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$. ومنه :

$$S=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\sqrt{6}\times\sqrt{21}=\frac{3\sqrt{14}}{2} .$$

2- أ) لنفرض أن $\vec{u}(a;b;c)$ ومنه $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=2a+b-c=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=-a-2b-4c=0$ وبالتالي لدينا الجملة التالية :

$$\begin{cases}2a+b-c=0 & (1)\\ -a-2b-4c=0 & (2)\end{cases}$$

وهذه الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول . بضرب المعادلة (1) في $(+2)$ و بجمع المعادلتين نجد : $3a-6c=0$ أو $a-2c=0$. لنأخذ في هذه المعادلة $a=2$ ومنه $c=1$. وبتعويض قيمتي a و c في المعادلة (1) نجد $b=-3$.

إذن $\vec{u}(2;-3;1)$. الشعاع $\vec{u}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطيا ومن نفس المستوي (ABC) فهو عمودي على

المستوي (ABC) . معادلة المستوي (ABC) الذي $\vec{u}(2;-3;1)$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $2x-3y+z+k=0$ وبما أن (ABC) يشمل $A(-1;0;1)$ فإن : $2(-1)-3\times 0+1+k=0$ ومنه $k=1$. إذن معادلة (ABC) هي $2x-3y+z+1=0$.

جـ) النقطة $D(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) لأن : $2(-1)-3\times 1+2+1\neq 0$. إذن الرباعي $ABCD$ هو رباعي الوجوه . د) المسافة بين النقطة $D(-1;1;1)$ والمستوي (ABC) هي :

$$d=\frac{|2(-1)-3\times 1+2+1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{14}}{7} .$$

3) الرباعي الوجوه $ABCD$ هو هرم قاعدته المثلث ABC وارتفاعه $h=\frac{\sqrt{14}}{7}$ فيكون حجمه يساوي : $V=\frac{1}{3}B\cdot h$

حيث B هي مساحة القاعدة (المثلث ABC) ومنه :

$$V=\frac{1}{3}B\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{7}=1 .$$

4- أ) تكون معادلة المستوي (BCD) هي :

$2x-5y+2z+3=0$ إذا كان إحداثيات النقاط D,C,B تحقق معادلة (BCD) . بما أن $2\times 1-5\times 1+2\times 0+3=0$ فإن $B(1;1;0)$ تنتمي إلى (BCD) .

بما أن $2\times 0-5\times(-1)+2\times(-4)+3=0$ فإن $C(0;-1;-4)$

تنتمي إلى (BCD) .

أيضا النقطة $D(-1;1;2)$ تنتمي إلى (BCD) لأن إحداثيات النقطة D تحقق معادلة المستوي (BCD) .

بما أن إحداثيات النقاط D,C,B تحقق المعادلة :

$2x-5y+2z+3=0$ فتكون هذه المعادلة هي معادلة (BCD)

ب) المسافة بين النقطة A والمستوي (BCD) هي :

$$d=\frac{|2(-1)-5\times0+2\times1+3|}{\sqrt{2^2+5^2+2^2}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

ج) إذا اعتبرنا أن القاعدة للرباعي الوجوه $ABCD$ هي المثلث BCD فيكون ارتفاع الرباعي الوجوه هي المسافة بين النقطة A والمستوي (BCD) أي $h=\frac{\sqrt{33}}{11}$. نعلم أن الحجم V للرباعي $ABCD$ هو : $V={}^{1}\!/_{3}\,B\cdot h$. لدينا $V=1$ (سؤال 3)

و $h={}^{\sqrt{33}}\!/_{11}$ و B تمثل مساحة المثلث BCD.

$V={}^{1}\!/_{3}\times B\times{}^{\sqrt{33}}\!/_{11}=1$ ومنه : $B={}^{33}\!/_{\sqrt{33}}=\sqrt{33}$.

إذن مساحة المثلث BCD هي : $\sqrt{33}$.

حل التمرين 31

1) $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$

$D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$

$G(1;1;1),H(0;1;1)$

لدينا $\overrightarrow{AG}(1;1;1),\overrightarrow{BD}(-1;1,0)$

$\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-1)+1\times1+1\times0=0$

. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=0$

إذن $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$. الشعاع $\overrightarrow{AG}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ غير مرتبطين خطيا وينتميان إلى المستوي (BDE) فهو عمودي على هذا المستوي .

2) معادلة المستوي (BDE) الذي $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي له هي من الشكل : $x+y+z+k=0$ وبما أن المستوي (BDE) يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1+0+0+k=0$ ومنه $k=-1$ ، إذن معادلة المستوي (BDE) هي : $x+y+z-1=0$.

3) المسافة بين النقطة $H(0;1,1)$ والمستوي (BDE) هي:

$$d(H;(BDE))=\frac{|0+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4) المستقيم (Δ) يعامد المستوي (BDE) يعني أن $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (BDE) هو شعاع التوجيه المستقيم (Δ) المستقيم (Δ) هو موجه بالشعاع $\vec{u}(1;1;1)$ ويمر بـ $H(0;1,1)$

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني وجود عدد حقيقي λ

بحيث : $\overrightarrow{HM}=\lambda\vec{u}$ ومنه $\begin{cases}x=\lambda\\ y-1=\lambda\\ z-1=\lambda\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$

حيث $\lambda\in\mathbb{R}$. وهذه الجملة الأخيرة هي التمثيل الوسيطي لـ(Δ).

حل التمرين32

1) لدينا $\overrightarrow{n_P}(-2;1;5)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1;2;0)$.

$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=1\times(-2)+2\times1+0\times5=0$ ومنه $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}$

إذن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

2) معادلة المستوي (P) هي من الشكل : $-2x+y+5z+k=0$

وبما أن $B(1;-2;1)\in(P)$ فإن :

$-2\times1+(-2)+5\times1+k=0$ ومنه $k=-1$ إذن معادلة

المستوي (P) هي : $-2x+y+5z-1=0$.

$(P)\cap(Q)=(D)$ يعني :

$$(D):\begin{cases}-2x+y+5z-1=0 & (1)\\ x+2y-7=0 & (2)\end{cases}$$

بأخذ y كوسيط ($y=\lambda$) ، لدينا من (2)

$x=-2y+7=-2\lambda+7$ وبتعويض في (1) نجد : $z=-\lambda+3$ ،

إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو معرف بـ : $\begin{cases}x=-2\lambda+7\\ y=\lambda\\ z=-\lambda+3\end{cases}$

من التمثيل الوسيطي لـ(D) نستنتج أن شعاع التوجيه المستقيم (D)

هو $\overrightarrow{u'}(-2;1;-1)$ أيضا $k\cdot\overrightarrow{u'}$ هو شعاع التوجيه لـ(D) ،إذن

$-\overrightarrow{u'}(2;-1;1)$ هو شعاع التوجيه لـ (D) أي $\vec{u}(2;-1;1)$.

النقطة $C(-1;4;-1)$ هي نقطة من (D) وهي توافق $\lambda=4$.

3) المسافة بين النقطة $A(5;-2;-1)$ والمستوي (P) هي :

$$d(A;(P))=\frac{|-2\times5+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1+5^2}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين A والمستوي (Q) هي :

$$d(A;(Q))=\frac{|5-2\times2-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

4) بما أن المستويين (P) و (Q) متعامدان فإن حسب نظرية

فيتاغورس : $d^2(A;(D))=d^2(A;(P))+d^2(A;(Q))$

ومنه $d(A;(D))=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

حل التمرين33

1) $\overrightarrow{AC}(1;4;2)$, $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$. الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقاط $C;B;A$ ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي (P) . لدينا $(P): 2x-y+z+3=0$

$A(1;2;-3)\in(P)$ لأن : $2-2-3+3=0$.

$B(-3;1;-4)\in(P)$ لأن : $2(-3)-1+4+3=0$

$C(2;6;-1)\in(P)$ لأن : $2\times 2-6+(-1)+3=0$.

إذن معادلة المستوي (P) هي : $2x-y+z+3=0$.

2- المستقيم (D) يمر بالنقطة $\varpi\left(-1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ وموجه بالشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ الذي هو شعاع ناظمي للمستوي (P).

$M(x;y;z)\in(D)$ يعني : $\overrightarrow{\varpi M}=\lambda\vec{n}$ ومنه :

($x+1=2\lambda$ و $y-\frac{3}{2}=-\lambda$ و $z-\frac{1}{2}=\lambda$)

ومنه : ($x=-1+2\lambda$ و $y=\frac{3}{2}-\lambda$ و $z=\frac{1}{2}+\lambda$)

وهذه المعادلات الثلاثة تشكل التمثيل الوسيطي للمستقيم (D).

3)
$$MA^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=$$
$$=x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+14$$
$$MB^2=(x+3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=$$
$$=x^2+y^2+z^2+6x-2y-8z+26$$

$$MA^2+MB^2=2x^2+2y^2+2z^2+4x-6y-2z+40$$

لدينا $MA^2+MB^2=41$ ومنه :

$2x^2+2y^2+2z^2+4x-6y-2z-1=0$ ومنه :

$x^2+y^2+z^2+2x-3y-z-\frac{1}{2}=0$ ومنه :

$$(x+1)^2-1+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=4 .$$

هذه المعادلة هي معادلة الكرة (S) التي مركزها $\varpi\left(-1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=2$. ب) بعد النقطة ϖ عن المستوي (P) هو

$$d(\varpi;(P))=\frac{\left|2\times(-1)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+3\right|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=0 .$$

بما أن المسافة بين النقطة ϖ مركز الكرة (S) والمستوي (P) هي تساوي الصفر ، فالمستوي (P) يقطع الكرة (S) وفق الدائرة الكبيرة للكرة (S) أي الدائرة التي مركزها ϖ ونصف قطرها 2 .

حل التمرين34

1) معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-2z+1=0$ (خطأ)

لأن النقطة $A(1;0;-1)$ لا تنتمي إلى هذا المستوي .

2) معادلة المستوي (ABD) هي : $2x-y+z-1=0$ (صحيح)

لأن إحداثيات النقاط C,B,A تحقق المعادلة : $2x-y+z-1=0$

3) $ABCD$ هو رباعي الوجوه لأن النقطة $C(1;-1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABD) الذي معادلته $2x-y+z-1=0$.

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ (خطأ)

لأن شعاع التوجيه المستقيم (AB) هو $\vec{u}(-1;1;3)$ والتمثيل الوسيطي يعطينا $\vec{u}(-1;1;2)$.

5) المستقيم (AB) محتوى في المستوي ذو المعادلة : $-x+y+z+2=0$ (خطأ) لأن النقطة $B(0;1;2)$ لا تحقق معادلة المستوي وبالتالي فهي لا تنتمي إليه .

6) المستوي (Q) ذو المعادلة $x+2y-z+1=0$ عمودي على المستوي (P) (خطأ) لأن $\overrightarrow{n_P}(2;-1;1)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1;2;-1)$ غير متعامدان . 7) بعد النقطة $A(1;0;-1)$ عن المستوي (P) هو 2 (خطأ) لأن النقطة A تنتمي إلى المستوي (P) (إحداثياتها تحقق معادلة (P)) وبالتالي يكون بعدها عن المستوي (P) هو صفر .

8) المستقيمان (AB) و (BC) متعامدان (خطأ) لأن :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-6\neq0$ وهذا يعني : (AB) و (BC) غير متعامدان

9) ABD هو مثلث متساوي الساقين (صحيح) لأن :
$AB=BD=\sqrt{5}$.

10) إحداثيات النقطة H مسقط النقطة C على المستوي (ABD) هي $(0;-1;2)$ (خطأ) لأن إحداثيات H لا تحقق معادلة المستوي (ABD) : $2x-y+z-1=0$ وبالتالي فهي لا تنتمي إليه .

حل التمرين35

1- أ) $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$. $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني وجود عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه : $\begin{cases} x=8+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=8+2\lambda \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

ب) المستقيم (D) موجه بالشعاع $\vec{u}(3;2;-2)$ والمستقيم (Δ) بالشعاع $\vec{u'}(2;3;2)$. نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ، إذن المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيان وبالتالي فهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

لندرس تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

$(D)\cap(\Delta)$ معناه : $(*)\begin{cases} -5+3t=2\lambda+8 & (1) \\ 1+2t=3\lambda & (2) \\ -2t=2\lambda+8 & (3) \end{cases}$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و (3) تقبل الحل :

$\lambda=-\frac{7}{5}$ و $t=-\frac{13}{5}$ وهاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (1) ومنه الجملة $(*)$ ليست لها حل ويكون $(D)\cap(\Delta)=\{\ \}$ إذن المستقيمان (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

2) لدينا $A(8;0;8)$ نقطة من المستقيم (Δ) ، $\vec{u}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه (D) و $\vec{v}(2;3;2)$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) .

المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) ويوازي (D) يعني أن المستوي (P) يشمل النقطة A ويوازي كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

نعلم أن معادلة (P) هي من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لـ (P).

المستوي (P) يوازي كل من المستقيمين (D) و (Δ) يعني :

$\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ ومنه :

$$\begin{cases}3a+2b-2c=0 & (1)\\ 2a+3b+2c=0 & (2)\end{cases}$$

ومنه بجمع المعادلتين نحصل على $5a+5b=0$ ومنه $a=-b$ ، وبأخذ $a=2$ فإن $b=-2$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد : $c=1$ ، إذن $\vec{n}(2;-2;1)$.

وتكون معادلة المستوي (P) من الشكل : $2x-2y+z+d=0$.

وبما أن (P) يشمل النقطة $A(8;0;8)$ فإن :

$2\times8-2\times0+8+d=0$ ومنه : $d=-24$ ، إذن معادلة المستوي (P) هي : $2x-2y+z-24=0$.

3) لدينا $AM=BM$ ومنه $AM^2=BM^2$ ومنه :

$$AM^2=(x-8)^2+(y-0)^2+(z-8)^2$$

$$BM^2=(x-10)^2+(y-3)^2+(z-10)^2$$

$AM^2=BM^2$ يكافئ :

$$(x-8)^2+y^2+(z-8)^2=(x-10)^2+(y-3)^2+(z-10)^2$$

وبعد النشر وتبسيط المعادلة نجد : $8x+6y+4z-81=0$ وهي معادلة المستوي (Q) . 4 – أ) لدينا معادلة (S) :

$$x^2+y^2+z^2-18x-3y-18z+160=0$$

وهذه المعادلة نستطيع كتابتها على الشكل الآتي :

$$(x-9)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-9)^2=\frac{17}{4}=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 .$$

نلاحظ أن (S) هي كرة مركزها $I\left(9;\frac{3}{2};9\right)$ منتصف $[AB]$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$ وقطرها $2R=\sqrt{17}=AB$

ب) المستوي (P) يحتوي (Δ) أي المستقيم (AB) و I مركز الكرة (S) هو منتصف $[AB]$ ، إذن المسافة بين مركز الكرة (S) والمستوي (P) تساوي 0 وهذا يعني أن المستوي (P) يقطع الكرة (S) وفق الدائرة الكبيرة أي الدائرة التي قطرها $[AB]$.